NEO-STATICA

AVCTORE

HIERONYMO SACCHERIO

E SOCIETATE IESV

In Ticinensi Vniuersitate

MATHESEOS PROFESSORE

EXCELLENTISSIMO

SENATUI

MEDIOLANENSI

DICATA.

MEDIOLANI, MDCCVIII.

Ex Typographia Iosephi Pandulfi Malatestæ.

Superiorum permissu.

EXCELLENTISSIMO SENATUI MEDIOLANENSI.

HIERONYMUS SACCHERIUS
è Soc. IESU
F.

VT primùm Veſtris ſuffragijs, imò Veſtrûm omnium acclamatione, PP. ampliſſimi, ad mathematicas diſciplinas in Ticinenſi Vniuerſitate explanandas, mihi meoque Ordini perhonorifico decreto, annis ab hinc nouem, delectus fui; nihil planè antiquius habui, quàm vt obſequium erga Vos meum, nouâ aliquâ luce in has tenebricoſas facultates illatâ, palàm oſtenderem; ſtudioſiſque matheſeos vtilem,

quantamcunq; possem, operam collocarem. Diu meditanti stetit tandem ante oculos imago quædam æquitatis, iustitiæq; Vestræ, nimirum Statica; quæ numero, pondere, & mensurâ naturam in officio continet, & singula quæque librans, nutu veluti suo, vniuersitatem corporum æquissimis legibus moderatur. Hanc itaque Naturæ Themidem (sic enim appellare liceat) amplissimo Vestro Ordini, cui legum tuendarum sanctitas, publicæq; incolumitatis custodia demandata est, nouo in lumine collocatam, obsequentissimus sisto: Eamq; ipsam felicitatem, quam indefesso labore ac studio cæteris communem facitis; eandem, inquam, ipsam vobis singulis à summo rerum omnium moderatore, prorogatis, ad bonum publicum, in senium felicissimum annis plurimis, auguror, atq; oro.

AN-

ANTONIUS MILESIUS

E SOCIETATE IESV

In Prouincia Mediolanensi Visitator.

CUm Opusculum, cui titulus, NEO-STATICA, à P. Hieronymo Saccherio nostræ Societatis Sacerdote conscriptum, aliquot eiusdem Societatis Theologi recognouerint, & in lucem edi posse probauerint, de mandato P. N. Præpositi Generalis Michaëlis Angeli Tamburini, potestatem facimus, vt typis mandetur; Si jis, ad quos spectat, ita videbitur. Cuius rei gratiâ has literas manu nostrâ subscriptas, sigilloque nostro munitas damus. Genuæ 16. Iunij 1708.

ANTONIUS MILESIUS.

Locus † Sigilli.

Iussu

IVsu Reuerendissimi P. Magistri Thomæ Pij Testij Inquisitoris Mediolani, Librum, cui titulus est: *Neo-statica, Authore Adm. Reu. P. Hieronymo Saccherio Societatis Iesu, in Vniuersitate Ticinensi Matheseos Professore*: perlegi, & expendi, nihilq; in eo inueni, quod aut bonis moribus obesse possit, aut Sacræ Doctrinæ repugnet. Immò egregium opus mihi visum est, dignum Scriptoris ingenio, quod ad illustrandas, nouitate ac subtilitate Doctrinæ, mathematicas disciplinas, publicam lucem mereatur; atque ita, quantùm ad me attinet, censeo, ac testor.

Ex Collegio S. Alexandri Cal. Iulij 1708.

D. Demetrius Supensius Cler. Reg. Barnabita pro S. Inquisit. Med. librorum Censor.

Stante præfatâ attestatione.

IMPRIMATVR.

Fr. Ioseph Maria Reina Ord. Prædic. Sac. Theol. Magister, ac Commissarius S. Officij Mediolani.

Michaël de Constantinis Canonicus Theol. S. Nazarij pro Eminentissimo D. D. Card. Archinto Archiep.

Angelus Maria Maddius pro Excellentissimo Senatu.

PRÆ-

PRÆFATIO AVCTORIS

AD LECTOREM.

PAucis te alloquor, amice lector. Dum Neo-staticam promissam legis; nolim, animum inducas, Operi nostro pretium, atque ornamentum à specioso titulo quæsitum fuisse. Non ea mihi mens est: Nouam Staticam promitto: nouam Staticam dabo. Neq; enim de more contemplabimur grauia, tanquam infinitè dissita à centro; sed qualia apud nos sunt, ad vnum commune centrum vergentia, sub directionibus haudquaquam parallelis. Contemplationi eiusmodi occasionem præbuit libellus de naturâ grauium, à P. Thoma Ceua in lucem editus: super quo plura opportuniùs leges nostri libri quarti initio. Multùm etiam incitauit Illustrissimus D. Marchio Pius Bellisomus Patricius Ticinensis, Vir mihi familiari consuetudine in primis deuinctus, interq; præclaras animi dotes, mathematicis disciplinis haud leuiter instructus. Soluendum ego illi, ad exercitationem ingenij, problema tradideram: Qualem putaret veram lineam à proiectis describi, habito nimirum respectu, in successiuâ nouorum deorsum impetuum conceptione, ad aliquod centrum, versùs quod naturales ipsi impetus concipi intelliguntur.

gantur. Ille autem, rei difficultate facilè perſpectâ, eidem problemati ſoluendo, repetitis perſuaſionibus, me tandem vel inuitum applicuit. Nec ſtudium caruit ſucceſſu: problema equidem ſolui; ſed à primis vſq; principijs per longam indaginem deducenda res fuit. Ne te diutius morer: ante ſingulos libros epilogum habes infrà dicendorum. Non diſplicebunt, opinor, quæ leges: pergratum tamen facies, ſi quid tibi minùs placuiſſe intellexero. Vale.

NEO-

NEO-STATICÆ
LIBER PRIMUS.

SYNOPSIS.

Decernit hic liber, primùm quidem ratiocinio satis consueto, tum rursum subtiliori, nouáque planè disquisitione, directionem impetus ex duobus, aut pluribus compositi: eius rationem ostendit ad impetus componentes; atque item rationem impetus secundùm naturalem ipsius directionem ad impetum ex eo subnascentem secundùm aliam directionem. Porrò autem occasione arreptâ demonstratur æqualitas anguli incidentiæ cum angulo reflexionis. Ac tandem, in duplici ibi explicatâ hypothesi, traduntur aliquot scitu digniora de momentis grauium ex quiete.

DEFINITIONES.

1 VElocitas est affectio motus, secundùm quam tanto tempore tanta longitudo percurri intelligitur.

2 Æqualis velocitas est, quâ æqualis longitudo æquali tempore percurritur.

3 Una

3 Una velocitas alterius velocitatis dupla, aut tripla dicitur, quâ, æquali tempore, seu dupla, seu tripla longitudo percurritur. Atque ita secundùm quamlibet aliam multiplicationem.

4 Momentum dicitur à mouendo: estque vis ipsa motrix, quatenus hîc & nunc omnibus inspectis apta est tantum pondus tantâ velocitate mouere.

5 Æquale momentum est, quod æquali velocitate æquali mouendo ponderi conducit.

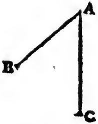
6 Vnum momentum alterius momenti duplum, aut triplum dicitur; quod duplo, aut triplo ponderi, æquali velocitate; seu duplâ, aut triplâ velocitate æquali ponderi mouendo conducit. Atque ita similiter secundùm quamlibet aliam multiplicationem.

7 Ponderis nomine venit materia, seu corpus, quatenus præditum naturali suâ grauitate, quæ est vis motrix deorsum, siue ad centrum terræ. Nihilominus considerandum hîc est sub eo nomine solum corpus præcisè sumptum ab omni vi motrice; licèt ipsam eius magnitudinem ex grauitate, seu ponderandi, hoc est deorsum tendendi vi metiamur: quapropter, seu grauis, seu ponderis nomine, ipsum corpus censemus, ac definimus.

8 Æquabiliter percurri dicitur ab aliquo mobili aliquod spatium, cùm æquali semper velocitate per illud fertur.

9 Impetum nunc synonimè accipimus pro ipsâ velocitate, nunc pro radice proximâ eiusdem, sed diuersimodè ac momentum. Nam momentum maius est, non solùm quod æquale pondus maiori velocitate, sed etiam, quod æquali velocitate maius pondus potest mouere. Contrà impetus, etiam acceptus pro radice proximâ velocitatis, ille solus dicitur maior, qui maiorem velocitatem aptus est excitare in eo pondere, quod afficit, nulla habita ratione magnitudinis ipsius ponderis. Quare, si duo pondera æquè velociter moueantur, & vnum sit alterius duplum; dicetur inesse ponderi maiori momentum duplum momenti alterius, sed impetus æqualis.

10 Si ponderi *a* obtinenti impetum, cuius naturalis directio sit



ſit quædam *a c*, ſolus relictus ſit liber motus ſecundùm quandam *a b*: impetus ille ſecundùm *a c* dicetur impetus primigenius ſecundùm *a c*, ſiue ſecundùm primariam, aut primigeniam directionem *a c*, ſiue primariæ directionis *a c*: impetus verò ſecundùm *a b* dicetur impetus coactus, aut ſubnaſcens ſecundùm *a b*, quatenus nimirùm ſubnaſci intelligitur ex illo impetu primigenio ſecundùm *a c*.

11 Porrò autem directio alicuius impetus, ſeu ponderis aliquo impetu citati, dicitur naturalis, cùm via aliqua ſpontè initur ab ipſo pondere, ex vi talis vnius, aut plurium ſimul impetuum, diuerſas habentium directiones. At nomen impetus primigenij concedimus illi ſoli, qui ab ipſa origine ſit ſimplex, ſeu non compoſitus ex alijs impetibus, diuerſas habentibus directiones. Qualiter verò ſe habeat iſta impetuum compoſitio ſuo in loco conſtabit.

12 Denique impetus ſecundùm *a c* in eo differt ab impetu dicto ſecundùm *c a*; quòd mobile ex vi prioris impetus deſcribit rectam *a c* versùs partes puncti *c* in infinitum protractam; at ex vi poſterioris deſcribit ipſam *c a* versùs partes puncti *a* in infinitum protractam. Rurſum verò, ſi dicamus impetum *a c* ſecundùm *a c*, & impetum *a b* ſecundùm *a b*, ſenſus erit, quòd impetus ſecundùm prædictas directiones ſunt inter ſe, vt ipſæ *a c*, *a b*.

AXIOMATA.

1 STante æquali velocitate, æqualis longitudo æquali tempore percurritur, maiori tempore maior, minori minor. Rurſum duplo, aut triplo tempore, dupla, aut tripla longitudo percurritur. Atque ita ſimiliter ſecundùm quamlibet aliam multiplicationem.

2 Stante æquali tempore, æqualis longitudo æquali velocitate percurritur, maiori velocitate maior, minori minor. Rurſum duplâ, aut triplâ velocitate, dupla, aut tripla longitudo percurritur. Atq; ita ſimiliter ſecundùm quamlibet aliam multiplicationem.

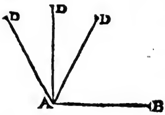
Congruit cum definitionibus secundâ, & tertiâ huius.

3 Stante æqualitate ponderum, æquale momentum æquali velocitate mouet, maius momentum maiori, minus minori. Rursum duplum, aut triplum momentum duplâ, aut triplâ velocitate mouet. Atque ita similiter secundùm quamlibet aliam multiplicationem. Congruit cum definitionibus quintâ, & sextâ huius.

4 Stante æquali velocitate, ab æquali momento æquale pondus mouetur, à maiori momento maius pondus, à minori minus. Rursum à duplo, aut triplo momento, duplum, aut triplum pondus mouetur. Atque ita similiter secundùm quamlibet aliam multiplicationem. Hoc etiam congruit cum definitionibus quintâ, & sextâ huius.

5 Ab eodem, aut æquali, idem, siue æquale similiter consequitur, dum cætera omnia similiter æqualia sint. Ex ipso vsu innotescet sensus, atque euidentia huius axiomatis.

POSTVLATVM.



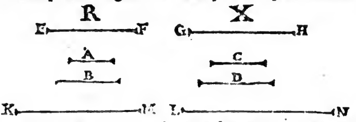
SI quoddam pondus *a* citatum intelligatur impetu secundùm *a b*, dum interim ipsum planum *a b* mouetur sibi ipsi parallelum, describente puncto *a* rectam quandam *a d*: postulamus nullam in pondere *a* sequi variationem motus secundùm ipsum planum *a b*: adeòut nimirùm pondus *a* æquali tempore perficere intelligatur ipsam *a b*, & quamlibet eius designabilem portionem; seu planum *a b* consistere in suo situ ponatur; siue quacunque ratione moueri sibi ipsi parallelum, describente puncto *a* rectam quamcunque *a d*. Id manifestè apparet, etiam ad sensum, in naui horizontaliter delatâ quieto mari, in qua motus omnes, qui fiunt, ita se habent respectu nauis, perinde ac si illa quiesceret. Postulatum huiusmodi receptum iam est apud alios mathematicos. Super eo tamen leges scholium post decimam tertiam huius.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

SI ex duabus homogeneis quantitatibus, dua alia eiusdem, aut diuersi generis homogenea quantitates, eâ lege consequi intelligantur; vt, si prima minor fuerit, aut aqualis, aut maior, aut quacunq; ratione multiplex secunda; etiam tertia, consequens ex primâ, minor sit, aut aqualis, aut maior, aut similiter multiplex quarta, consequentis ex secundâ: Dico, ita fore quamlibet quantitatem assumptam pro primâ ad quamlibet quantitatem assumptam pro secundâ, vt tertia consequens ex primâ ad quartam consequentem ex secundâ.

SIt enim primarum quantitatum genus *R*, & secundarum genus *X*. Assumptæ sint in genere *R* duæ quælibet quantitates *a* & *b*;

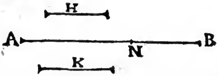


& in genere *X* duæ aliæ; *c* quidem consequens ex *a*; *d* verò consequens ex *b*. Dico ita esse *a* ad *b*, vt *c* ad *d*. Sumatur in genere *R*, ipsius *a* quæcunque multiplex *e f*. Consequetur ex *e f*, iuxta factam hypothesim, quædam *g h* in genere *X*, quæ ita erit multiplex ipsius *c* consequentis ex *a*, vt *e f* est multiplex prædictæ *a*. Pari ratione, si in eodem genere *R* sumatur ipsius *b* quæcunque multiplex *k m*; consequetur ex *k m* quædam *l n* in genere *X*, quæ ita multiplex erit ipsius *d* consequentis ex *b*, vt *k m* est multiplex prædictæ *b*. Quare *e f*, *g h* æquè multiplices erunt primæ *a*, & tertiæ *c*: atque item *k m*, *l n* æquè multiplices erunt secundæ *b*, & quartæ *d*. Quoniam verò *e f*, & *k m* in genere *R* consistunt; ipsæ autem *g h*, & *l n* ex illis consequuntur in genere *X*: ita enimverò iuxta factam hypothesim res procedet;

vt, ſi prima ef minor fuerit, aut æqualis, aut maior ſecundâ km, etiam tertia gb minor ſit, aut æqualis, aut maior quartâ ln. Sumuntur autem ef, & gb pro quibuslibet æquè multiplicibus primæ a, & tertiæ c; atque item km, & ln pro quibuslibet æquè multiplicibus ſecundæ b, & quartæ d. Igitur ita (a) erit prima a ad ſecundam b, vt tertia c ad quartam d. Quare, ſi ex duabus homogeneis quantitatibus, duæ aliæ eiuſdem, aut diuerſi generis homogeneæ quantitates, eâ lege conſequi intelligantur; vt, ſi prima minor fuerit, aut æqualis, aut maior, aut quacunque ratione multiplex ſecundæ, etiam tertia conſequens ex primâ minor ſit, aut æqualis, aut maior, aut ſimiliter multiplex quartæ conſequentis ex ſecundâ: ita erit quælibet quantitas aſſumpta pro primâ ad quamlibet aſſumptam pro ſecundâ, vt tertia conſequens ex primâ ad quartam conſequentem ex ſecundâ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SECVNDA.

Si aliquod mobile æquabiliter feratur, tempora lationum per duo quæuis ſpatia deſignata, erunt inter ſe vt ipſa ſpatia perurſa.



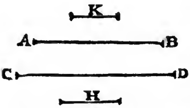
Mobile a percurrat æquabiliter rectam ab, in quâ deſignetur quælibet portio an. Dico ita eſſe tempus per an ad tempus per ab, vt an ad ab. Tempus per an ſit b, & per ab ſit k. Quoniam igitur, ſi tempus b minus fuerit, aut æquale, aut maius, aut qualitercunque multiplex temporis k; etiam an percurſa tempore b minor (b) erit, aut æqualis, aut maior, aut ſimiliter multiplex ipſius ab percurſæ tempore k; ita erit, per præcedentem, tempus b ad tempus k, ſiue tempus per an ad tempus per ab, vt an ad ab. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

(a) *def. 6. quinti.* (b) *ax. 1. huius.*

PROPOSITIO TERTIA.

Si duo spatia æquali tempore æquabiliter percurrantur, ea erunt inter se in homologâ ratione velocitatum. Hinc è conuerso tempus erit equale tempori, si spatia percursa, & velocitates in eadem fuerint ratiône.



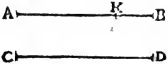
Mobile *a* percurrat æquabiliter rectam *a b*, atque item mobile *c* æquali tempore rectam *c d*. Dico ita esse velocitatem mobilis *a* ad velocitatem mobilis *c*, vt *a b* ad *c d*. Velocitas mobilis *a* sit *k*, & velocitas mobilis *c* sit *h*. Quoniam igitur, si velocitas *k* minor fuerit, aut æqualis, aut maior, aut quacunque ratione multiplex velocitatis *h*; etiam recta *a b* dato tempore velocitate *k* percursa, minor (a) erit, aut æqualis, aut maior, aut similiter multiplex ipsius *c d* æquali tempore velocitate *h* percursæ: Ita erit, per primam huius, velocitas *k* ad velocitatem *h*, hoc est velocitas mobilis *a* ad velocitatem mobilis *c*, vt *a b* ad *c d*. Porrò autem facilè patet veritas secundæ partis, quæ est conuertens primæ. Itaque constant proposita.

PROPOSITIO QVARTA.

Si duo æqualia spatia æquabiliter percurrantur, tempora lationum erunt inter se in reciprocâ ratione velocitatum.

Mobile *a* percurrat æquabiliter rectam *a b*, & mobile *c* rectam *c d* ipsi *a b* æqualem. Dico ita esse tempus per *c d* ad tempus per *a b*, vt reciprocè velocitas mobilis *a* ad velocita-

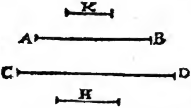
(a) *ax. 2. huius.*



citatem mobilis *c*. Percurrat enim mobile *a* rectam *a k* æquali ipso tempore, quo mobile *c* percurrit rectam *c d*. Ita se habebit tempus per *c d*, seu per *a k*, ad tempus (a) per *a b*, vt *a k* ad *a b*. Vt autem *a k* ad *a b*, seu *c d* ipsi æqualem, ita velocitas (b) mobilis *a* ad velocitatem mobilis *c*. Itaque tempus per *c d* ad tempus per *a b* ita se habet, vt reciprocè velocitas mobilis *a* ad velocitatem mobilis *c*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QVINTA.

Ponderum æqualium momenta sunt inter se in homologâ ratione velocitatum.



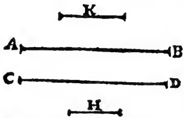
Pondus *a* velocitatem habeat *a b*; & pondus *c*, ipsi *a* æquale, velocitatem *c d*. Dico ita esse momentum ponderis *a* ad momentum ponderis *c*, vt *a b* ad *c d*. Momentum ponderis *a* sit *k*, & momentum ponderis *c* sit *h*. Quoniam igitur, si momentum *k* minus fuerit, aut æquale, aut maius, aut quacunque ratione multiplex momenti *h*; etiam velocitas (c) ponderis *a*, eo momento *k* instructi, minor erit, aut æqualis, aut maior, aut similiter multiplex velocitatis ponderis *c* (ipsi *a* æqualis) momento *h* instructi: Ita erit (d) momentum *k* ad momentum *h*, siue momentum ponderis *a* ad momentum ponderis *c* ipsi *a* æqualis, vt velocitas ponderis *a* ad velocitatem ipsius ponderis *c*, nimirum vt *a b* ad *c d*. Quod erat demonstrandum.

PRO-

(a) 2. *huius*. (b) 3. *huius*. (c) *ax*. 3. *huius*. (d) 1. *huius*.

PROPOSITIO SEXTA.

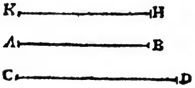
Si duo pondera æquali velocitate ferantur, eorum momenta erunt inter se in homologâ ratione ipsorum ponderum.



Pondera *a* & *c* æquales sortiantur velocitates *a b*, *c d*. Dico ita esse momentum ponderis *a* ad momentum ponderis *c*, vt ipsum pondus *a* ad pondus *c*. Momentum ponderis *a* sit *k*, & momentum ponderis *c* sit *h*. Quoniam igitur, si momentum *k* minus fuerit, aut æquale, aut maius, aut quacunque ratione multiplex momenti *h*; etiam pondus *a* minus erit, aut æquale, aut maius, aut similiter (a) multiplex ponderis *c*; cùm in istis ponderibus æqualem procreent velocitatem prædicta momenta. Ita erit (b) momentum *k* ad momentum *h*, hoc est momentum ponderis *a* ad momentum ponderis *c*, vt ipsum pondus *a* ad pondus *c*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Ratio momenti ad momentum componitur ex homologis rationibus ponderis ad pondus, & velocitatis ad velocitatem.

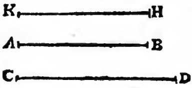


Pondus *a* velocitatem habeat *a b*, & pondus *c* velocitatem *c d*. Sumatur aliud pondus *k* æquale ponderi *c*, velocitatem autem habens *k h* æqualem velocitati *a b* ponderis *a*. Iam sic. Ratio momenti ponderis *a* ad momentum ponderis *c* componitur ex rationibus

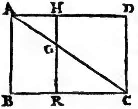
B nibus

(a) *ax. 4. huius*. (b) *1. huius*.

nibus momenti ponderis *a* ad momentum ponderis *k*, & momenti ponderis *k* ad momentum ponderis *c*. At momentum ponderis *a* ita se habet ad momentum (a) ponderis *k* æquali velocitate præditi, vt ipsum pondus *a* ad pondus *k*, siue ad pondus *c* ipsi *k* æquale: momentum autem ponderis *k* ita se habet ad momentum (b) ponderis *c* ipsi *k* æqualis, vt velocitas ipsius ponderis *k*, seu velocitas ponderis *a*, ad velocitatem ponderis *c*. Igitur ratio momenti ponderis *a* ad momentum ponderis *c*, componitur ex homologis rationibus ponderis *a* ad pondus *c*, & velocitatis ipsius ponderis *a* ad velocitatem ponderis *c*. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO OCTAVA.



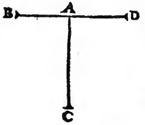
SI aliquod mobile a *constitutum in angulo cuiusuis parallelogrammi* a b c d, *duplici impetu citatum intelligatur, vno secundùm* a b, *& altero secundùm* a d, *qui ita sint inter se, vt ipsa latera* a b, a d: *dico ex duplici illo impetu componi impetum, cuius directio naturalis est diameter* a c, *quique ita est ad impetus secundùm latera* a b, a d, *vt ipsa diameter* a c *ad latera* a b, a d.

SI enim latus *a b*, eo impetu secundùm *a d*, aut *b c*, procedere intelligatur sibi ipsi parallelum versùs *d c* intra latera *a d*, *b c*, dum interim pondus *a* ex alio impetu secundùm *a b* progreditur per ipsum latus *a b*; nulla vtique sequetur variatio in motu ponderis *a* (c) secundùm *a b*, seu per ipsum latus *a b*. Quare sortietur hac ratione pondus *a* duplicem illum impetum sub

(a) *6. huius*. (b) *5. huius*. (c) *Postulatum huius*.

ſub prædictis directionibus *a d*, *a b*. Dum verò latus *a b* progreſſum fuerit vſque ad congruendum cuidam *b r*, ipſi *a b* parallelæ, & intra latera *a d*, *b c* conſiſtenti; eoque ipſo tempore pondus *a* latione ſua per *a b* peruenerit in quoddam punctum *g*: Ita (a) erit *a b* ad *b g*, vt impetus directionis *a d* ad impetum directionis *a b*, ſiue vt *a d* ad *a b*, hoc eſt *d c*. Igitur punctum *g* eſt in diametro *a c*, ac proinde directio impetus compoſiti eſt diameter *a c*. Rurſum pondus *a*, ex vi impetus compoſiti, eo ipſo tempore conficit rectam *a g*, quo, ex vtroque impetu ſeorſim ſumpto, permeantur ipſæ *a b*, *b g*. Quare ita (b) eſt impetus compoſitus ſecundùm diametrum *a c* ad impetus ſecundùm latera *a d*, *a b*, vt *a g* ad *a b*, *b g*, ſiue vt diameter *a c* ad latera *a d*, *d c*, hoc eſt *a d*, *a b*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO NONA.



SI quoddam pondus a *conſtitutum ſupra planum* b a d *citatum intelligatur à vi directionis* a c, *quæ perpendicularis ſit ad ipſam* b a d: *eiuſdem autem motui, ſeu directo ex* a *verſus* c, *ſeu reflexo ex* a *verſus partes directè oppoſitas, reſiſtat ex vna parte planum ipſum immobile* b a d, *& ex altera alterum planum, & ipſum immobile, ponderi* a *ſuperpoſitum, adeò ut nimirum ſolus illi relinquatur motus liber ſupra planum* b a d. *Dico pondus* a *manſurum quietum in ſuâ poſitione.*

NAm vis directionis *a c* perpendicularis ad ipſam *b a d*, æqualiter omnino ſe habet ad procreandum impetum, ſeu versùs partes puncti *d*, ſeu versùs partes puncti *b*: igitur ſi concipias impetum quendam ſubnaſci ex ea vi directionis *a c* versùs partes puncti *d*, æqualem omnino (c) impetum intelligere debes ſubnaſci

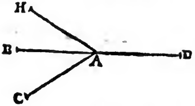
(a) 3. *huius*. (b) 3. *huius*. (c) *ax*. 5. *huius*.

ſci verſùs partes puncti *b*. Inde autem fiet, vt vnus impetus alterum adæquatè elidat: & ſic pondus *a* quietum manebit in ſua poſitione. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMA.

Sin verò, cæteris alijs manentibus, recta c a *obtuſum angulum efficiat* c a d*: Dico pondus* a *motum iri verſùs partes puncti* b, *nimirum ad partes anguli acuti* c a b.

Niſi enim moueatur verſùs partes puncti *b*; vel mouebitur verſùs partes puncti *d*; vel quietum manebit in ſua poſitio-



ne: horum autem neutrum contingere poſſe, ſic euincitur. Eſto angulus *b a b* æqualis angulo *c a b*: intelligaturque pondus *a* citari ad motum ab alia inſuper vi omnino æquali, directionis *a b*. Si pondus *a* quietum manere intelligatur in ſua poſitione, quantùm eſt ex præciſâ vi directionis *a c*; tum cenſeri debet manſurum ibi quietum, quantùm eſt ex præciſâ vi (a) omnino æquali, & omnino æqualiter, ſeu ſimiliter applicatâ, directionis *a b*; tum etiam cenſendum eſt manſurum ibi quietum, quantùm eſt ex vtraque illâ vi ſimul ſumptâ, quoniam vtraque illarum virium aliunde adæquatè eliſa intelligitur, vtpote impotens ad creandum vllum motum. Pari ratione, ſi pondus *a* motum iri intelligatur verſùs partes puncti *d*, quantùm eſt ex præciſâ vi directionis *a c*, multò magis mouebitur verſùs eaſdem partes puncti *d*, accedente ipſi alterâ vi omnino æquali, & omnino æquali-

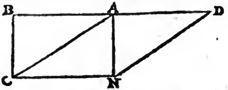
(a) *ax. 5. huius.*

æqualiter, seu similiter applicatâ, directionis *a b*. Constat autem, quòd pondus *a* ex duplici illâ vi simul sumptâ mouebitur (a) versùs partes puncti *b*: igitur etiam ab vnâ tantùm vi citatum directionis *a c*, nec quietum manebit in sua positione, nec mouebitur versùs partes puncti *d*, sed mouebitur versùs partes puncti *b*, nimirum ad partes anguli acuti *c a b*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Ijsdem manentibus: Ex quouis puncto b *ipsius* a b *excitetur ad* a b *perpendicularis* b c. *Dico ita esse impetum subnascentem directionis* a b *ad impetum primariæ directionis* a c, *vt* a b *ad* a c.

INtelligatur enim pondus *a*, præter vim prædictam secundùm *a c*, citari etiam ab altera vi secundùm *a d*, quæ ita sit ad



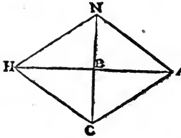
vim secundùm *a c*, vt *a d*, siue *a b* ipsi æqualis, ad *a c*. Compleatur parallelogrammum *c a d n*, & iungatur *a n*. Pondus *a* obtinebit vim (b) naturalis directionis *a n*. Erit autem *a n*, propter parallelas, perpendicularis ad ipsam *b a d*. Quapropter, relictâ ponderi *a* libertate solius motus supra planum immobile *b a d*, manebit pondus *a* quietum in sua positione. Igitur impetus secundùm *a b*, qui subnasci intelligitur ex vi primariæ directionis *a c*, æqualis esse debet impetui secundùm *a d*, qui nimirum affertur ab alterâ vi motrice directionis *a d*. Quare ita erit prædictus impetus secundùm *a b* ad impetum primariæ directionis *a c*, vt impetus, seu vis motrix secundùm *a d*, ad eundem

dem

(a) 8. *huius*. (b) 8. *huius*.

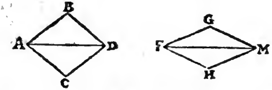
dem impetum, seu vim motricem secundùm *a c*, nimirum vt *a d*, aut *a b*, ad *a c*. Quod erat demonstrandum.

ALITER IDEM.



Citatum enim intelligatur pondus *a*, alio æquali impetu *a n* secundùm ipsam *a n*, facientem cum *a b* angulum æqualem ipsi *c a b*. Compleatur parallelogrammum *a c b n*, cuius diametri *a b*, *c n* se inuicem intersecabunt ad rectos angulos in *b*. Constat, quòd pondus *a*, duplici prædicto æquali impetu citatum, sortietur naturalem impetum secundùm diametrum *a b*, qui ita (a) erit ad impetus secundùm latera *a c*, *a n*, vt diameter *a b* ad ipsa latera *a c*, *a n*. Rursum, dimidia pars impetus secundùm diametrum *a b* subnasci intelligetur (b) ex impetu secundùm *a n*, & altera dimidia ex impetu secundùm *a c*. Quare impetus secundùm *a c* ita erit ad impetum ex eo subnascentem secundùm *a b*, vt ipsa *a c* ad dimidiam partem ipsius *a b*, nimirum vt hypothenusa *a c* ad latus *a b* trianguli *a b c*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DVODECIMA.



Si pondera a, *&* f *æqualibus impetibus cieantur* ab, ac, fg, fh, *secundùm ipsas primarias directiones* ab, ac, fg, fh; *sitq; angulus* g f h *minor angulo* b a c. *Dico motum compositum ponderis* f *velociorem fore motu composito ponderis* a.

Com-

(a) 8. *huius*. (b) *ax.* 5. *huius*.

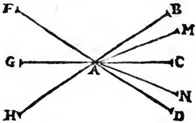
COmpleantur parallelogramma, *bacd*, *gfbm*. Constat ex elementis, diametrum *fm* maiorem fore diametro *ad*. Porrò impetus compositus secundùm *fm* ita (a) est ad impetum secundùm primariam directionem *fg*, vt *fm* ad *fg*. Rursum etiam, propter æqualitatem impetuum & rectarum, ita est impetus secundùm primariam directionem *fg* ad impetum secundùm primariam directionem *ab*, vt *fg* ad *ab*: ac tandem ita est impetus secundùm primariam directionem *ab* ad impetum (b) compositum secundùm *ad*, vt *ab* ad *ad*. Igitur ex æquo, ita erit impetus compositus secundùm *fm* ad impetum compositum secundùm *ad*, vt *fm* maior ad *ad* minorem. Quare motus compositus ponderis *f* velocior erit motu composito ponderis *a*. Quod erat demonstrandum.

SVPPOSITIO PRO SEQVENTI THEOREMATE.

SVpponimus æqualis esse velocitatis motum reflexum, ac motum directum; quoniam eadem est prorsùs vis reflexiua alicuius ponderis, atque eiusdem directè motrix.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

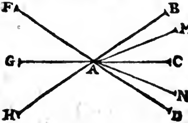
Angulus incidentiæ est æqualis angulo reflexionis.



POndus *a* citatum intelligatur impetu secundùm *fad*: resistat autem eius motui directo planum consistens *gac*. Constitutus sit etiam ad easdem partes angulus *bac*, æqualis ipsi *fag*. Dico pondus *a* reflexum iri ex puncto *a* secundùm directionem *ab*. Citatum enim intelligatur idem pondus alio æquali impetu se-

(a) 8. *huius*. (b) 8. *huius*.

ſecundùm *b a b* : & rurſum intelligatur reſiſtere eius motui directo planum conſiſtens *g a c* : Dico pondus *a* reflexum itidem iri ex puncto *a* (quantùm eſt ex vi poſterioris huius impetus) ſecundùm directionem *a d*. Conſtat autem æquales inter ſe fore quatuor angulos *f a g*, *b a c*, *b a g*, *d a c*. Iam verò, ex impetibus directis ſecundùm *f a d*, & *b a b* conſequi intelligantur impetus reflexi ſecundùm quaſdam reſpectiuas directiones *a m*, & *a n*. Æquales vtique inter ſe erunt (a) anguli *m a c*, *n a c*; cùm vtrobiq; ponatur æqualis impetus directus, & vtrobique æqualis inclinatio ad planum *g a c*. Rurſum etiam æquales inter ſe erunt impetus ipſi reflexi ſecundùm *a m*, & *a n*; cùm ſupponantur æquales (b) impetibus directis ſecundùm *a d*, & *a b*. Quare, ſeu ſoli ſpectentur prædicti impetus directi ſecundum *a d*, & *a b*, ſeu ſpectentur ſoli impetus reflexi ſecundùm *a m*, & *a n*; motus tamen compoſitus erit (c) ſecundùm eandem *a c*. Rurſum etiam erit æquè velox. Quoniam enim velocitas ponderis *a* ſecundùm *a c*, eſt abſolutè determinata ex vi impetuum directorum ſecundùm *a d*, & *a b*; inuariata vtique manebit, etiamſi, loco impetuum directorum, conſiderentur impetus ex iis apti exurgere per reflexionem ſecundùm *a m*, & *a n*. Nequit autem, per præcedentem, eſſe æquè velox motus compoſitus ponderis *a* ſecundùm *a c*, in vtrâq; prædictâ conſideratione, niſi rectæ *a m*, *a n* congruant cum ipſis *a b*, *a d*, atque adeò efficiant cum *a c* angulos reflexionis æquales ipſis angulis incidentiæ *f a g*, *b a g*. Igitur ita dicendum. Quod erat propoſitum.

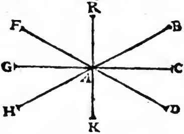


AD-

(a) *ax. 5. huius*. (b) *ſuppoſ. præc.* (c) *8. huius*.

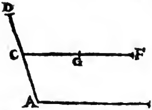
ADNOTATIO.

QVòd si, coëuntibus prædictis directis impetibus in eum compositum, qui est secundùm *g a c*, planum quoddam consistens *k a r*, ad quod perpendicularis sit ipsa *g c*, resistat motui per *a c*: Tunc enimverò reflectetur pondus *a* secundùm *a g*, in directum positam ipsi *a c*, & perpendicularem prædictæ *k r*; quia nihil est, cur motus reflexus conuergere magis debeat seu versùs partes puncti *r*, seu versùs partes puncti *k*, æqualiter nempe in vtranque partem se habente vi directè motrice. Inde autem, vt in præcedente propositione, simili planè ratiocinio fiet, vt impetus directus secundùm *f a*, seorsùm consideratus, transire debeat in reflexum secundùm *a b*; ac vicissim impetus directus secundùm *b a* in reflexum secundùm *a f*, existentibus vtique æqualibus angulis incidentiæ, ac reflexionis, *f a r*, *b a k*.

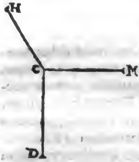


SCHOLIVM.

QVoniam tota operis huius nostri doctrina inniti debet præmissis propositionibus, octauæ, & vndecimæ, quas vtique, iacti postulati beneficio, demonstrauimus: operæ pretium iudico eidem postulato confirmando diligentiùs insistere. Itaque postulauimus, quòd pondus *a* citatum impetu secundùm *a b*, æquali tempore perficere intelligatur ipsam *a b*, & quamlibet eius designabilem portionem, seu planum *a b* consistere in suo situ ponatur, seu quacunque ratione moueri sibi ipsi parallelum, describente puncto *a* quamcunque rectam *a d*. Quoniam enim pondus *a*



aliquem adhuc impetum obtinet (facili siquidem experientiâ comprobari id potest) præter illum, quo trahitur à plano *a b*: Dum planum ipsum *a b* peruénit ad congruendum cuidam *c f*, peruenerit pondus *a* in quoddam punctum *g* ipsius *c f*. Iam verò, si prior ille impetus secundùm *a b* intelligitur inibi habere naturalem suam directionem secundùm planum parallelum ipsi *a b*, constat vtique de veritate postulati. Quoniam enim impetus plani *a b* impenditur totus in pertrahendo pondere *a* secundùm ipsam *a d*; idem planè impetus secundùm *a b*, aut *c f* manebit in pondere *a*, dum aliàs constet retineri ab eo impetu, præcisè vtique sumpto, naturalem suam directionem priori *a b* parallelam. Porrò autem constare satis de hoc potest: quoniam, sublatâ directione parallelâ, non est maior ratio de vnâ directione, quàm de aliâ. At vereberis ne fortè aliquod punctum primigeniæ directionis *a b* (siue hoc sit semper idem, siue multiplex) trahat ad se illius impetus conuergentiam. Nullâ tamen ratione sustineri id posse, ita suadetur. Si enim conuergentia eiusmodi locum potest aliquando habere, id erit maximè in impetu naturali grauium versùs centrum; quandoquidem iste in ordine ad ipsum centrum



concipitur. Nihilominùs, si quoddam graue *b* descendat per planum inclinatum *b c*; dum autem peruenerit in punctum *c*, reperiat obstaculum plani horizontalis *c m* (existente nempe *d* centro communi grauium, & rectâ *d c* perpendiculari ad *c m*) non ideò tamen subsistet ibi illud graue, sed vlteriùs progredietur supra ipsum planum *c m*. Subsistere autem ibi deberet, suppositâ eâ conuergentiâ. Nam impetus successiuè acquisiti à graui *b* in descensu per planum *b c* versùs centrum *d*, retinerent semper naturalem suam conuergentiam versùs ipsum centrum *d*. Quare ibi in puncto *c* totus impetus grauis *b* haberet naturalem directionem versùs prædictum centrum *d*; atq; adeò moraretur (a) ibi quietum. Quod est contra mani-

(a) 9. *huius*. fe-

festam experientiam. Igitur ea conuergentia sustineri non potest.

Quanquam verò sufficere hæc possunt ad plenam præmissi postulati confirmationem; doctrinæ tamen gratiâ, aliam adhuc, eamque nouam viam placet inire. Itaque omissis tum illo postulato, tum etiam propositionibus eidem innixis, ad alia progredimur. Constat autem, non solùm priores septem propositiones, sed etiam nonam vsui esse posse in sequentibus, cùm ab eo postulato nullatenus pendeant. Præmittimus nonnulla alia postulata, numero quidem plura, sed ea tamen omnino certa, nullique dubitationi obnoxia.

POSTVLATA.

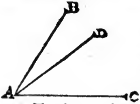
1 SI cuidam ponderi *a*, citato secundùm *a c*, solus relictus sit liber motus supra planum immobile *b a d*, sitque acutus angulus *c a b*: mouebitur pondus *a* versùs partes puncti *b*, nimirum ad partes anguli acuti *c a b*. Demonstratum est in propositione decima, beneficio illius prioris postulati. Nunc verò assumendum id



est tanquam immediatè notum ex facillimâ, & vnicuique obuiâ experientiâ. Si enim consideretur impetus naturalis ponderum deorsum; an non, ex impetu naturali deorsum secundùm *a c*, obtinebit pondus *a* in plano inclinato *a b* impetum aliquem versùs partes puncti *b*, nimirum ad partes anguli acuti *c a b*? Certè pondus *a* descendet per *a b*. Quòd si planum *b d* fuerit horizontale, conciteseq; pondus *a* ad motum secundùm quandam *a c*, non perpendicularem ipsi *b d*; an non statim obseruabis ipsum excurrere versùs partes puncti *b*, nimirum ad partes prædicti anguli acuti *c a b*?

2 Impetus autem subnascens secundùm *a b* maior erit, dum, cæteris alijs paribus, angulus *c a b* acutior fuerit. Hæc etiam veritas eisdem experientijs, alijsq; facilibus obseruationibus, euidenter comprobatur.

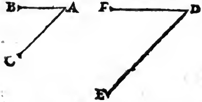
3 Si aliquod pondus *a* citatum intelligatur duobus impetibus, rationem aliquam inter ſe dicentibus, quorum directiones *ab*, *ac* angulum *bac* contineant: mouebitur naturaliter pondus *a* ſecundùm quandam directionem *ad*, quæ ſecet angulum *bac*. Hanc veritatem facili experimento comprobare ſibi vnusquiſque poteſt.



4 Tandem poſtulamus æquabilem ſemper fore motum ipſum compoſitum ſecundùm *ad*, quatenus nempe tanta eius velocitas ab ipſo vſque initio determinata intelligitur ex tantâ motuum componentium velocitate. Poſtulatum dico, quod re verâ cenſeri poſſet tanquam ſimplex hypotheſis, cohærens vtique alteri ſubintellectæ de motu futuro ſemper æquabili ſecundùm ipſas *ab*, *ac*, ex vi correſpondentium impetuum ſeorsùm acceptorum.

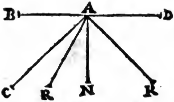
AXIOMA.

Si impetus ſecundùm naturalem directionem *ac* æqualis fuerit impetui ſecundùm naturalem directionem *de*; atque item angulus acutus *cab* æqualis angulo *edf*: impetus ſubnaſcens ſecundùm *ab* æqualis erit impetui ſubnaſcenti ſecundùm *df*. Sin verò impetus ſecundùm naturalem directionem *ac* minor fuerit, aut maior, aut quacunque ratione multiplex alterius impetus ſecundùm naturalem directionem *de*; etiam impetus ſubnaſcens ſecundùm *ab* minor erit, aut maior, aut ſimiliter multiplex impetûs ſubnaſcentis ſecundùm *df*. Hoc axioma colligi poterit demonſtratiuè, ſi placeat, ex quinto axiomate ad initium huius.



PRO-

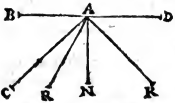
PROPOSITIO DECIMAQVARTA.



SI quoddam pondus a *citatum intelligatur duobus impetibus secundùm ipsas directiones* a c, a d, *obtusum angulum* d a c *continentes; sitque impetus secundùm* a d *æqualis illi adæquato, qui ex impetu secundùm* a c *subnasci intelligitur secundùm* a b, *in directum positam ipsi* a d. *Dico primò, non adfuturum in pondere* a *vllum impetum viuum secundùm quamlibet directionem naturalem* a r, *facientem cum* a b *angulum minorem, aut maiorem recto. Dico secundò, adfuturum in pondere* a *impetum viuum secundùm quandam directionem naturalem* a n, *perpendicularem ipsi* a b.

DEmonstratur prima pars. Nam, quantùm est ex vi impetus primigenij secundùm *a d*, & illius adæquati impetus subnascentis secundùm *a b*; perinde se habebit pondus *a*, ac si nullo impetu cieretur. Quare, si censeatur adesse in pondere *a* impetus quidam viuus secundùm quandam directionem naturalem *a r*, facientem cum *a b* angulum minorem, aut maiorem recto: ex eo vtique subnascetur (a) alius quidam impetus secundùm *a b*, aut secundùm *a d*, si relictus intelligatur ponderi *a* solus liber motus supra planum *b a d*. Debebitur autem hic alius impetus subnascens, ipsi impetui secundùm *a c*. Igitur impetus adæquatus, qui ex impetu secundum *a c* subnasci intelligitur secundùm *a b*, non est æqualis impetui primigenio secundùm *a d*. Si enim *a r* faciat cum *a b* angulum acutum; iam impetus adæquatus subnascens secundùm *a b* maior erit ipso impetu primigenio secundùm *a d*. Sin verò *a r* faciat cum *a b* angulum obtusum, atque adeò acutum cum ipsa *a d*; iam impetus subnascens secundùm *a d* ex illo viuo impetu secundùm naturalem directionem

(a) *postul.* 1. *in schol. post* 13. *huius*.



nem *a r*, detrahendus erit ab impetu, qui subnasci ponebatur secundùm *a b* ex primigenio impetu secundùm *a c*; atq; adeò impetus adæquatus, qui ex impetu secundùm *a c* subnasci absolutè intelligitur secundùm *a b*, minor erit ipso impetu primigenio secundùm *a d*. Itaque (stante æqualitate inter impetum primigenium secundùm *a d*, & impetum adæquatum subnascentem secundùm *a b* ex impetu primigenio secundùm *a c*) competere nequit ipsi ponderi *a* vllus impetus viuus secundùm quamlibet directionem naturalem *a r*, facientem cum *a b* angulum minorem, aut maiorem recto. Quod erat priore loco demonstrandum.

Iam demonstratur secunda pars. Quòd enim impetus viuus secundùm *a n*, perpendicularem ipsi *a b*, obstare nequeat factæ hypothesi æqualitatis inter impetum primigenium secundùm *a d*, & prædictum subnascentem impetum secundùm *a b*, satis constare potest ex nonâ huius. Porrò autem aderit vtiq; in pondere *a* impetus quidam(a) viuus secundùm aliquam directionem naturalem, quæ secet angulum *d a c*. Atqui ostensum iam est, directionem eiusmodi nequire esse quamlibet *a r*, facientem cum *a b* angulum minorem, aut maiorem recto. Igitur reliquum est, vt adsit in pondere *a* impetus quidam viuus secundùm quandam directionem naturalem *a n*, perpendicularem ipsi *a b*. Quod erat posteriore loco demonstrandum.

DEFINITIO.

IMpetum autem prædictum subnascentem secundùm *a n*, appellabimus complementum. Nam impetus primigenius secundùm *a c* intelligitur adæquatè resolui in prædictos impetus subnascentes, vnum secundùm *a b*, & alterum secundùm *a n*, perpendicularem ipsi *a b*; adeò ut propterea vterq; horum impetuum subnascentium dici possit reliqui complementum.

PRO-

(a) *postul.* 3. *in schol. post* 13. *huius.*

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

IAm verò, manente figurâ præcedentis propositionis: si pondus a *citatum intelligatur duobus impetibus primigenijs secundùm* a b, *& secundùm* a n, *perpendicularem ipsi* a b*; qui vtique æquales sint illis, quos, secundùm prædictas directiones, subnasci posse intelligimus ex tanto quodam impetu primigenio secundùm* a c. *Dico adfuturum in pondere* a *æqualem omnino impetum compositum secundùm ipsam naturalem directionem* a c.

QVoniam enim (stante hypothesi præcedentis propositionis) solus adest in pondere *a* impetus quidam viuus secundùm naturalem directionem *a n*; perinde se habebit pondus *a*, ac si vnicus in eo adesset æqualis impetus primigenius secundùm eandem *a n*. Rursum verò (respicimus adhuc ad hypothesim præcedentis propositionis) perinde se habebit pondus *a*, si ab eo auferatur impetus primigenius secundùm *a d*, ac si aduenire ipsi intelligatur alius æqualis impetus primigenius secundùm *a b*, in directum positam ipsi *a d*. At in primo casu, constat adfuturum in pondere *a* solum ipsum impetum primigenium secundùm *a c*. Igitur in secundo casu aderit in pondere *a* æqualis impetus compositus secundùm eandem directionem naturalem *a c*. Porrò autem manifestum est, quòd secundus iste casus congruit omnino cum hypothesi præsentis propositionis. Nam impetus ille primigenius secundùm *a b*, qui aduenire intelligitur ponderi *a*; æqualis ponitur impetui primigenio secundùm *a d*, qui vtique positus est æqualis impetui subnascenti secundùm *a b* ex præsupposito impetu primigenio secundùm *a c*. Itaque constat propositum.

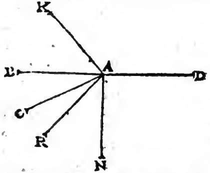
CO-

COROLLARIVM.

Hinc quilibet impetus ſecundùm naturalem directionem *a c*, quæ ſecet rectum angulum *n a b*, componi intelligetur ex duobus talibus impetibus ſecundùm *a b*, & ſecundùm *a n*; quales nimirum, ſecundùm prædictas directiones, ſubnaſci poſſe concipiuntur ex ipſo tali impetu ſecundùm *a c*.

SCHOLIVM.

Sed obſeruare iuuat, non etiam valere è conuerſo, quòd omnis impetus reſolui poſſit in illos impetus, ex quibus poteſt componi. Si enim pondus *a* cieatur duobus primigenijs impetibus ſecundùm *a b*, & ſecundùm *a r*, quæ acutum, aut obtuſum angulum *b a r* contineant; aderit vtique in pondere *a* impetus quidam compoſitus (a) ſecundùm quandam naturalem directionem *a c*, quæ ſecabit ipſum angulum *b a r*: ſed iſte tamen impetus ſecundùm *a c* non poterit ſimiliter reſolui in illos impetus ſecundùm *a b*, & ſecundùm *a r*.



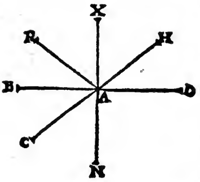
Nam impetus ſubnaſci potens ex. gr. ſecundùm *a b* ex dicto impetu ſecundùm *a c*, maior erit eo impetu primigenio ſecundùm eandem *a b*, dum angulus *b a r* fuerit acutus: ſin verò fuerit obtuſus, vel minor erit, vel nullus; vel etiam ſubnaſci poterit impetus quidam ſecundùm *a d*, in directum poſitam ipſi *a b*. Quod quidem clarè conſtabit ex mox dicendis. Excitatâ enim ad *a b* perpendiculari *a n*: ſi angulus *b a r* fuerit acutus; intelligetur impetus ſecundùm *a r* adæquatè (b) reſolui in impetum quendam ſubnaſcentem ſecundùm *a b*,

(a) *poſtul.3. in ſchol.poſt* 13.*huius*. (b) *in def.poſt* 14.*huius*.

a b (vnde adaugebitur iam poſitus impetus primigenius ſecundùm eandem *a b*) & in alterum ſubnaſcentem ſecundùm *a n*, perpendicularem ipſi *a b*. Quare impetus ipſe prædictus ſecundùm *a c* componi intelligetur ex iſto impetu ſecundùm *a n*, & ex illo adaucto ſecundùm *a b*; atque adeò in eoſdem etiam adæquatè reſolui. Pari ratione (exiſtente rurſum acuto angulo *b a r*) ſi excitetur ad *a r* perpendicularis *a k*; intelligetur impetus ſecundùm *a b* adæquatè (a) reſolui in impetum quendam ſubnaſcentem ſecundùm *a r* (vnde adaugebitur iam poſitus impetus primigenius ſecundùm eandem *a r*) & in alterum ſubnaſcentem ſecundùm *a k*, perpendicularem ipſi *a r*. Quare impetus ipſe prædictus ſecundùm *a c* componi intelligetur ex iſto impetu ſecundùm *a k*, & ex illo adaucto ſecundùm *a r*; atque adeò in eoſdem etiam adæquatè reſolui. Sin verò angulus *b a r* fuerit obtuſus, ſatis vtiq; patere poteſt, ne longior ſim, ita rem proceſſuram, vt iam præmonuimus. Itaq; tunc ſolùm impetus aliquis reſolui poteſt in eos impetus, ex quibus componitur, quoties impetuum componentium directiones angulum rectum contineant.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Angulus incidentiæ eſt æqualis angulo reflexionis.

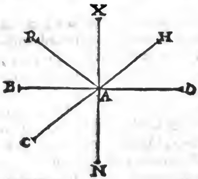


ET quidem, ſi pondus *a* citatum intelligatur impetu directionis *a n*, quæ recta ſit ad planum immobile *b a d*; factum iri reflexionem ſecundùm *a x* in directum poſitam ipſi *a n*, ac perpendicularem ipſi *b d*, ex eo manifeſtum ſit; quia non eſt, cur directio motus reflexi debeat eſſe magis inclinata, ſeu versùs partes

D pun-

(a) *in def. poſt 14. huius.*

puncti *b*, seu versùs partes puncti *d*; quoniam vis directè motrix æqualiter in vtranque partem se habet. Præterea suppono æqualis esse velocitatis motum reflexum, ac motum directum, quoniam eadem est prorsùs vis reflexiua alicuius ponderis, atque eiusdem directè motrix. Itaque pondus *a* citatum intelligatur secundùm *a c*, facientem cum *a b* angulum acutum *c a b*. Ex impetu secundùm primariam directionem *a c*, siue *b a*, ipsi *a c* in directum positam, subnascetur impetus quidam secundùm *a b*, cuius (a) complementum erit quidam alius subnascens impetus secundùm *a n* perpendicularem ipsi *a b*, cui æqualis intelligitur exurgens impetus per reflexionem secundùm *a x*, in directum positam ipsi *a n*. Quoniam igitur angulus *b a x* æqualis est angulo *b a n*; & impetus secundùm *a c* componi intelligitur ex prædictis impetibus secundùm *a b*, & secundùm *a n*, quibus æquales sunt, idem impetus secundùm *a b*, & impetus per reflexionem exurgens secundùm *a x*: ex istis itidem impetibus componi (b) intelligetur impetus quidam, tum æqualis ipsi impetui secundùm *a c*, tum etiam similiter se habens quoad suam quamlibet directionem *a r*. Quare angulus *r a x* æqualis erit angulo *c a n*, & angulus *r a b* æqualis angulo *c a b*, siue *h a d*. Iam verò, directionem *a r* conuenire motui reflexo ponderis *a*, dum planum immobile *b a d* resistere intelligatur eiusdem motui directo secundùm *a c*, siue *b a*, satis patet ex dictis. Itaque angulus reflexionis *r a b* æqualis est angulo incidentiæ *h a d*. Quod erat demonstrandum.

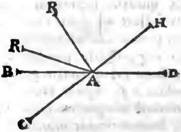


ALI-

(a) *def. post* 14. *huius*. (b) *ax*. 5. *huius*.

ALITER IDEM.

SI enim fieri potest; reflexum iri intelligatur pondus *a* secundùm quandam *a r*, facientem cum *a b* angulum minorem, aut maiorem ipso *b a d*, siue *c a b*. Æqualis tamen censebitur impetus reflexionis secundùm *a r* ipsi impetui primigenio secundùm *b a*, siue *a c*. Iam verò, si alicunde impeditus sit motus per ipsam *a r* (quemadmodum impeditus concipitur motus per *a c* à plano consistente *b d*) adeòut propterea solus relinquatur ponderi *a* motus liber supra planum *a b*; subnascetur enimverò ex ipso impetu reflexionis secundùm *a r* impetus quidam secundùm *a b*, qui vtique idem ipse erit, quem subnasci posse intelligimus ex impetu primigenio secundùm *b a*, siue *a c*; dum scilicet pondus *a* cogatur inire viam perforati cuiusdam tubuli *a b*. Quare ex æqualibus impetibus secundùm *a r*, & secundùm *a c*, æqualis subnasci posse impetus intelligetur secundùm *a b*, etiamsi inæquales sint anguli *r a b*, *c a b*: Quod est (a) absurdum. Itaque angulus reflexionis *r a b* nec minor est, nec maior, sed omnino æqualis ipsi angulo incidentiæ *b a d*. Quod erat demonstrandum.



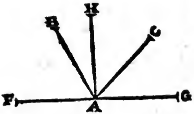
PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

SI *quoddam pondus* a *citatum duobus impetibus* a b, a c *secundùm primarias respectiuas directiones* a b, a c, *compositum impetum habere ponatur secundùm quandam naturalem directionem* a h, *ad quam ducatur perpendicularis* f a g: *dico impetus subnascentes secundùm* a f, & *secundùm* a g *ex respectiuis impetibus secundùm primarias directiones* a b, a c,

D 2 *esse*

(a) *postul.* 2. *in schol. post* 13. *huius.*

esse inter se aquales, ac propterea se inuicem adaquatè elidentes.



SI enim alteruter subnascens impetus, vt secundùm *af*, ponatur altero maior; iam viuus aderit impetus quidam secundùm *af*, quantus scilicet est ipsius excessus supra impetum subnascentem secundùm *ag*. Quare pondus *a*, præter impetum illum secundùm *ab*, alium (a) quendam præterea sortietur impetum viuum secundùm *af*. Igitur eius naturalis directio erit (b) alia quædam minimè congruens ipsi *af*, aut *ab*; quod est contra hypothesim. Itaque neuter subnascens impetus secundùm *af*, & secundùm *ag* est altero maior; sed ipsi sunt inter se æquales, ac propterea se inuicem adæquatè elidentes. Quod erat demonstrandum.

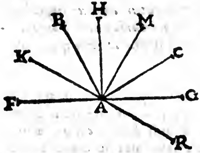
PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

E *Conuerso autem* (Fig. præc.) *si impetus subnascentes secundùm* a f, *& secundùm* a g *ex respectiuis impetibus* a b, a c *secundùm ipsas primarias directiones* a b, a c *fuerint inter se aquales: Dico impetum ex illis compositum, esse secundùm quandam* a h, *perpendicularem ipsi* f a g.

QVoniam enim impetus subnascentes secundùm *af*, & secundùm *ag* sunt complementa partialium impetuum subnascentium secundùm *ah* ex respectiuis impetibus secundùm *ab*, & secundùm *ac*; si impetus subnascentes secundùm *af*, & secundùm *ag* æquales inter se fuerint, ac propterea se inuicem adæquatè elidentes, iam solus superesset viuus impetus secun-

(a) *ex 14. huius, & def. post ipsam.*
(b) *postul. 3. in schol. post 13. huius.*

cundùm *a b*, ex illis partialibus impetibus aggregatus. Igitur naturalis directio ponderis *a*, duos illos impetus sortientis secundùm *a b*, & secundùm *a c*, erit ipsa *a b*.



Quòd enim nulli alteri directioni, vt *a m*, conuenire id possit, ita euincitur. Ducatur ad *a m* perpendicularis *k a r*; sitq; angulus *k a m* minor angulo *f a m*: erit angulus *r a m* maior angulo *g a m*. Quoniam igitur æquales ponuntur impetus subnascentes secundùm *a f*, & secundùm *a g*, ex respectiuis impetibus secundùm *a b*, & secundùm *a c*; impetus autem subnascens secundùm *a k* maior (a) est eo, qui subnascitur secundùm *a f*; qui verò subnascitur secundùm *a r* minor est eo, qui subnascitur secundùm *a g*: erit impetus subnascens secundùm *a k* maior eo, qui subnascitur secundùm *a r*. Quare; cùm impetus subnascentes secundùm *a k*, & secundùm *a r*, sint (b) complementa partialium impetuum subnascentium secundùm *a m*, ex respectiuis impetibus secundùm *a b*, & secundùm *a c*; sortietur pondus *a*, præter adæquatum impetum secundùm *a m*, alium quendam viuum impetum secundùm *a k*; quantus nempe est excessus ipsius impetus subnascentis secundùm *a k* supra impetum subnascentem secundùm *a r*. Igitur naturalis directio ponderis *a* erit alia (c) quædam minimè congruens ipsi *a k*, aut *a m*. Quare non alia est naturalis directio ponderis *a* præter dictam *a b*. Quod erat demonstrandum.

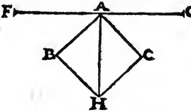
PRO-

(a) *postul. 2. in schol. post 13. huius.* (b) *def. post 14. huius.*
(c) *postul. 3. in schol. post 13. huius.*

PROPOSITIO DECIMANONA.

SI quoddam pondus a *citatum intelligatur duobus impetibus æqualibus* a b, a c *secundùm ipsas primarias directiones* a b, a c; *feretur naturaliter pondus* a *per* a h *diametrum ipsius parallelogrammi* a b h c.

DVcatur ad *a b* perpendicularis *f a g*. Quoniam æquales inuicem sunt recti anguli *g a b*, *f a b*, atque item æquales anguli *b a b*, *c a b*; æquales etiam inter se erunt residui *b a f*, *c a g*. Est etiam impetus *a b* secundùm primariam directionem *a b* æqualis impetui *a c* secundùm primariam directionem *a c*. Igitur, cùm omnia vtrinq; æqualia sint; impetus subnascens secundùm *a f* ex impetu prædicto secundùm *a b* æqualis erit (per ax. 5. huius) impetui subnascenti secundùm *a g* ex prædicto impetu secundùm *a c*. Quare (per præcedentem) impetus compositus ex prædictis impetibus secundùm primarias directiones *a b*, *a c*, erit secundùm *a b*, perpendicularem ipsi *f a g*, hoc est secundùm diametrum ipsius parallelogrammi *a b h c*. Quod erat demonstrandum.



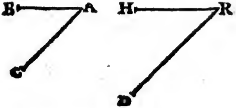
COROLLARIVM.

QVoniam æquales inter se sunt anguli *b a b*, *c a b*, atq; item æquales impetus ipsi secundùm primarias directiones *a b*, *a c*; manifestum est æquales inter se fore partiales impetus secundùm *a b*, qui subnasci intelliguntur ex ipsis impetibus secundùm *a b*, & secundùm *a c*; vt propterea adæquatus impetus secundùm *a b* duplus sit eius, qui ex altero impetu secundùm *a b*, aut secundùm *a c* subnasci intelligitur.

PRO-

PROPOSITIO VIGESIMA.

S*I duo pondera* a, *&* r *sortiantur impetus* a c, r d *secundùm primarias respectiuas directiones* a c, r d, *ad quas consti-*



tuti sint æquales acuti anguli c a b, d r h: *Dico impetus respectiuè subnascentes secundùm* a b, *& secundùm* r h, *ita esse inter se, vt ipsi impetus primigenij* a c, r d.

QVoniam enim, si impetus secundùm *a c* minor fuerit, aut æqualis, aut maior, aut quacunque ratione multiplex ipsius impetus secundùm *r d*; etiam impetus subnascens secundùm *a b* minor (a) erit, aut æqualis, aut maior, aut similiter multiplex impetus subnascentis secundùm *r b*: ita erit impetus (b) subnascens secundùm *a b* ad impetum subnascentem secundùm *r b*, vt ipse impetus primigenius secundùm *a c* ad impetum primigenium secundùm *r d*, nimirum vt *a c* ad *r d*. Quod erat demonstrandum.

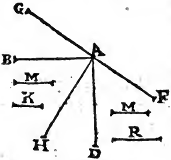
PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

S*I quoddam pondus* a *citatum intelligatur duobus quibuslibet impetibus* a b, a d *secundùm primarias directiones* a b, a d, *rectum angulum* b a d *continentes; ex quibus componi intelligatur impetus secundùm quandam naturalem directionem* a h: *Dico*

(a) *ax. in schol. post* 13. *huius*. (b) 1. *huius*.

Dico portionem impetus, quæ subnasci intelligitur secundùm a h *ex impetu* a b *secundùm primariam directionem* a b, *ita esse ad reliquam portionem impetus, quæ subnasci itidem intelligitur secundùm* a h *ex impetu* a d *secundùm primariam directionem* a d, *vt quadratum* a b *ad quadratum* a d.

DVcatur ad *a b* perpendicularis *g a f*. Æquales inter se erunt (a) impetus secundùm *a g*, & secundùm *a f*, subnascentes ex respectiuis impetibus *a b*, *a d* secundùm ipsas primarias directiones *a b*, *a d*. Quoniam igitur æquales inuicem sunt recti anguli *g a b*, *b a d*; dempto communi *b a h*, æquales inter se erunt residui *b a g*, *d a h*. Quare (per præcedentem) impetus subnascens secundùm *a g* ex impetu secundùm *a b*, ita est ad impetum subnascentem secundùm *a h* ex impetu secundùm *a d*, vt ipse impetus secundùm *a b* ad impetum secundùm *a d*, nimirum vt *a b* ad *a d*. Similiter, cùm æquales inuicem sint recti anguli *b a d*, *b a f*; dempto communi *b a d*, æquales inter se erunt residui *b a h*, *d a f*: atque adeò rursum (per præcedentem) impetus subnascens secundùm *a b* ex impetu secundùm *a b*, ita erit ad impetum subnascentem secundùm *a f* ex impetu secundùm *a d*, vt ipse impetus secundùm *a b* ad impetum secundùm *a d*, nimirum vt *a b* ad *a d*. Iam, claritatis gratiâ: impetus subnascens secundùm *a b* ex impetu secundùm *a b*, sit *k*: subnascens secundùm *a g* ex eodem impetu secundùm *a b*, sit *m*; cui æqualem prædiximus impetum secundùm *a f*, subnascentem ex impetu secundùm *a d*: tandem verò subnascens secundùm *a h* ex eodem impetu secundùm *a d*, sit *r*. Porrò autem ratio *k* ad *r* componitur ex rationibus *k* ad *m*, & *m* ad *r*. At ratio *k* ad *m* (sumpto pro *m* impe-



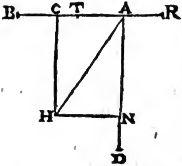
(a) 17. *huius*.

impetu secundùm *a f*, subnascente ex impetu secundùm *a d*) ostensa est æqualis rationi *a b* ad *a d*. Ratio autem *m* ad *r* (sumpto pro *m* impetu secundùm *a g*, subnascente ex impetu secundùm *a b*) ostensa est æqualis eidem rationi *a b* ad *a d*. Igitur ratio *k* ad *r* (hoc est, impetus subnascentis secundùm *a h* ex impetu secundùm *a b*, ad impetum subnascentem secundùm *a h* ex impetu secundùm *a d*) duplicata est rationis *a b* ad *a d*, nimirum æqualis rationi quadrati *a b* ad quadratum *a d*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIGESIMASECVNDA.

I*Isdem manentibus: Si pondus* a, *ex vi illius impetus compositi, perficiat aliquo tempore quandam* a h, *demittanturque ex quolibet ipsius puncto* h *ad* a b, a d, *perpendiculares* h c, h n: *Dico ipsam* a c, *aut* a n *non fore maiorem eâ, quam æquali ipso tempore lationis per* a h *percurrisset pondus* a, *vel solo impetu secundùm* a b, *vel solo impetu secundùm* a d.

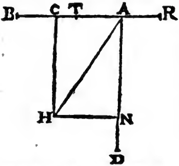
SI enim fieri potest, sit *a c* maior quàm *a t* percurrenda æquali ipso tempore lationis per *a h*, ex vi solius impetus primigenij secundùm *a b*. Quoniam igitur motus compositus secundùm *a h* censetur (a) semper æquabilis; si planum *a d*, procedens sibi ipsi parallelum, comitari intelligatur pondus *a* in descriptione ipsius *a h*; nimirum describente puncto *a* rectam *a c*, atque interim fluente per *a d* ipso pondere *a*: constat sanè ex elementis, æquabilem itidem fore motum puncti *a* per *a c*, & ponderis *a* per *a n*, æqualique tempore descriptum iri ipsas *a b*, *a c*. Igitur impetus puncti *a* secundùm *a b*



E maior

(a) *postul. 4. in schol. post 13. huius.*

maior erit impetu primigenio (a) ponderis *a* secundùm ipsam *a b*. Porrò autem hâc ipsâ ratione, aut alterâ æquiualente intelligi debet, in casu huius propositionis, descripta ipsa *a b*. Quare (attentâ percursione primæ infinitesimæ *a*) ab ipso vsque initio motus compositi secundùm *a b*, aderit in pondere *a*, saltem æquiualenter, impetus viuus secundùm *a b* maior eo, qui positus est primigenius secundùm eandem *a b*. Absurdum autem id est; quoniam adiunctus impetus secundùm perpendicularem *a d* conferre nullatenus potest ad augendum impetum (b) secundùm *a b*. Itaque *a c* nequit esse maior eâ, quam, æquali ipso tempore lationis per *a b*, percurrisset pondus *a* ex vi solius primigenij impetus secundùm *a b*. Similiter ostendemus, non esse *a n* maiorem eâ, quam æquali prædicto tempore percurrisset pondus *a*, ex vi solius primigenij impetus secundùm *a d*. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

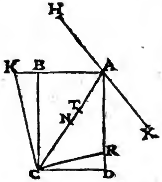
NEque putes euinci potuisse simili ratiocinio, quod ipsæ *a c*, *a n* minores esse nequeant illis, quas æquali prædicto tempore percurrisset seorsùm pondus *a*, ex vi primigeniorum impetuum secundùm *a b*, & secundùm *a d*: quatenus nempe impetus secundùm *a d* conducere nequit ad motum secundùm *a r*, in directum positam ipsi *a b*; vnde vtique fieri videtur, vt neque conferre possit ad minuendum impetum secundùm ipsam *a b*: quod quidem pariformiter valet de impetu secundùm *a b*, relatè ad impetum secundùm *a d*. Nam dico latam esse disparitatem. Euidens quidem est, non posse impetum secundùm *a d* conferre quidquam ad motum secundùm *a r*, in directum positam ipsi *a b*:

(a) *ax. 2 huius*. (b) *9. huius*.

a b: sed non ita etiam euidens est, quòd hâc solâ ratione impetus secundùm *a d* conferre possit ad minuendum impetum secundùm *a b*. Si quis enim vereatur, ne ex impetu secundùm *a d*, prout secundùm *a d* (ex quo nempe præcisiuè spectato consequitur deuiatio ponderis *a* ab eâ directione *a b*) consequatur itidem aliqualis elisio prædicti impetus secundùm *a b*; falsâ enimverò opinione ducetur, sed eâ tamen tolerandâ, nisi vlterior ratio aduersetur. Porrò autem satis constat, suspicioni isti locum non esse super augmento impetus. Quomodo enim impetus secundùm *a d* perpendicularem conferat ad augendum impetum secundùm *a b*, cùm nequeat conferre quidquam ad motum (a) secundùm ipsam *a b*? Sed hæc iam satis.

PROPOSITIO VIGESIMATERTIA.

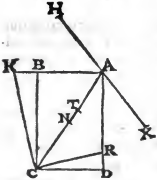
Esto quoduis rectangulum a b c d; *& quoddam pondus* a *citatum intelligatur duobus impetibus* a b, a d *secundùm primarias directiones* a b, a d. *Dico impetum compositum fore secundùm diametrum* a c; *atque etiam ita fore ad impetus prædictos secundùm* a b, *&* a d, *vt diameter* a c *ad latera* a b, a d.



Ducatur quædam *h a x*, efficiens cum *a b* angulum *h a b* æqualem angulo *b a c*. Quoniam æquales sunt duobus rectis anguli *h a c*, *c a x*, & angulus *b a d* est rectus; vni recto æquabuntur duo anguli *h a b*, *d a x*: æquatur etiam angulus *h a b* angulo *b a c*; igitur angulus *d a x* æquabitur reliquo *d a c*. Iam, omissâ paulisper præsenti hypothesi, consideretur pondus *a* triplici impetu citatum, vno *a c* secundùm *a c*, & duobus *a x*, *a h* secundùm respectiuas directiones *a x*, *a h*; sintque *a x*,

(a) 9. *huius*.

ab, & *an*, dimidia ipsius *ac*, inuicem æquales. Quoniam igitur ex impetu *an* secundùm *ac*, & ex impetu *ax* secundùm *ax* componitur impetus (a) secundùm naturalem directionem *ad*, cuius quantitas repræsentetur per quandam *ar*; atq; item ex impetu *nc*, siue *an* secundùm eandem *ac*, & ex *ab* secundùm *ab*, componitur impetus (b) secundùm naturalem directionem *ab*, cuius quantitas repræsentetur per quandam *ak*: ex tribus prędictis impetibus, vno adæquato *ac* secundùm *ac*, & duobus *ax*, *ab* secundùm respectiuas directiones *ax*, *ab*, componentur duo illi impetus *ar*, *ak* secundùm naturales directiones *ad*, *ab*; ex quibus duobus componi tandem ipsum impetum *ac* secundùm naturalem directionem *ac*, ex eo manifestè constat; quia de tribus illis, ex quibus duo isti componuntur, solus superest viuus adæquatus impetus *ac* secundùm *ac*; cùm reliqui *ax*, *ab* secundùm ipsas directiones primarias *ax*, *ab*, se inuicem adæquatè elidant, propter æqualitatem. Porrò autem ostendam, quòd *ak* æqualis est ipsi *ab*; & *ar* ipsi *ad*: vt propterea ex impetibus *ab*, *ad* secundùm primarias directiones *ab*, *ad* componi euincatur impetus *ac* secundùm ipsam diametrum *ac*. Si enim *ak* non est æqualis ipsi *ab*, erit maior, vel minor.



Sit primò, si fieri potest, maior. Quoniam impetus *ak* secundùm *ab*, componitur ex impetu *an* secundùm *ac*, & ex *ab* secundùm *ab*; dimidiatus impetus *ak* secundùm *ab* subnasci (c) intelligetur ex impetu *an* secundùm *ac*: Igitur, ex adæquato impetu *ac* secundùm *ac*, qui duplus est ipsius *an*, subnasci poterit impetus integer *ak* secundùm *ab*. Simili ratione ostendetur, quòd ex adæquato impetu *ac* secundùm *ac* subnasci potest integer impetus *ar* secundùm *ad*. Iam verò, quoniam ex impetibus *ak*, *ar* secundùm respectiuas directiones *ab*, *ad*, compo-

(a) 19. *huius*. (b) 19. *huius*. (c) *cor. post* 19. *huius*.

ponitur impetus *at* secundùm *at*; partialis impetus secundùm *ac* subnascens ex impetu *ak* secundùm *ab* sit *at*; reliquus *tc* subnascetur ex impetu *ar* secundùm *ad*. Erit itaque *ac* ad (a) *ak*, vt *ak* ad *at*, cùm idem sit angulus *cak*, *kat*, & ex impetu *ac* secundùm *ac* subnasci posſit impetus *ak* secundùm *ab*, impetus verò *at* secundùm *ac* subnascatur ex impetu *ak* secundùm *ab*. Similiter ostendetur ita esse *ac* ad *ar*, vt *ar* ad *tc*. Igitur quadratum *ak* æquale erit rectangulo *cat*; & quadratum *ar* æquale rectangulo *act*: quare quadratum *ac* æquale erit duobus simul quadratis *ak*, *ar*. Est autem quadratum *ac* æquale duobus simul quadratis *ab*, *ad*: igitur *ar* minor est quàm *ad*. Quoniam verò ita est impetus compositus secundùm *ac* ad impetum componentem secundùm *ad*, vt *ac* ad *ar*; æquali tempore lationis per *ac* percurrisset pondus *a* ipsam *ar* ex vi solius impetus secundùm *ad*. Quare demisſis ex *c* ad *ak*, & *ar* protractam, perpendicularibus *cb*, *cd*; erit ipsa *ad*, seu *bc* maior eâ, quam, æquali tempore lationis per *ac*, ex vi impetus compositi secundùm *ac*, percurrisset ipsum pondus *a* ex vi solius impetus secundùm *ad*. Quod est absurdum, & contra præcedentem. Non ergo *ak* maior est quàm *ab*.

Sed neque est minor, propter rationem mox allatam circa alteram *ar*: igitur *ak* æqualis est ipsi *ab*. Quare etiam *ar* æqualis erit ipsi *ad*, cùm ostenderimus quadratum *ac* æquale esse duobus simul quadratis *ak*, *ar*, quod aliàs constat æquale esse duobus simul quadratis *ab*, *ad*. Itaque ex impetibus *ab*, *ad* secundùm primarias directiones *ab*, *ad*, componitur impetus *ac* secundùm diametrum *ac* ipsius parallelogrammi rectanguli *abcd* &c. Quod erat demonstrandum.

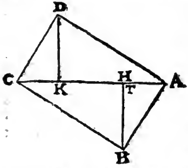
PRO-

(a) 20. *huius*.

PROPOSITIO VIGESIMAQVARTA.

S*I angulus* b a h *fuerit acutus, ita erit impetus* a b *secundùm primariam directionem* a b, *ad impetum ex eo subnascentem secundum* a h, *vt hypothenusa* a b *ad latus* a h *trianguli rectanguli* b h a.

Fiat parallelogrammum rectangulum *a b c d*, cuius diameter *a c* sit ipsa *a b* protracta in *c*. Ex impetibus *a b*, *a d* secundùm primarias directiones *a b*, *a d* componetur (a) impetus



a c secundùm ipsam diametrum *a c*. Partialis impetus secundùm *a c* subnascens ex impetu *a b* secundùm *a b* sit *a t*; reliquus *t c* subnasci intelligetur ex impetu *a d* secundùm *a d*. Erit autem impetus *a t* (b) ad impetum *t c*, vt quadratum *a b* ad quadratum *a d*. Ductâ verò ad *a c* perpendiculari *d k*, erunt similia triangula *b h a*, *d k c*: est etiam latus *d c* æquale lateri *b a*; igitur & *k c* æquabitur ipsi *b a*; ac propterea *b c* æqualis erit ipsi *a k*. Igitur, cùm propter triangula similia *c a b*, *b a b*, atque item *c a d*, *d a k* sint continuè proportionales *c a*, *a b*, *a b*, atque item *c a*, *a d*, *a k*; erit quadratum *a b* æquale rectangulo *c a b*, & quadratum *a d* æquale rectangulo *c a k*, siue *a c b*. Quare ita erit quadratum *a b* ad quadratum *a d*, siue *a t* ad *t c*, vt rectangulum *c a b* ad rectangulum *a c b*, siue vt *a b* ad *b c*. Igitur *a b* æqualis est ipsi *a t*: atque adeò ita est impetus *a b* secundùm *a b*, ad impetum ex eo subnascentem secundùm *a b*, vt hypothenusa *a b* ad latus *a b* trianguli rectanguli *b b a*. Quod erat demonstrandum.

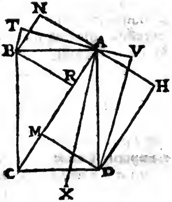
PRO-

(a) 23. *huius*. (b) 21. *huius*.

PROPOSITIO VIGESIMAQVINTA.

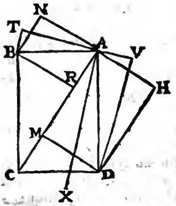
SI quoddam pondus a *citatum intelligatur duplici quolibet impetu* a b, a d *secundùm ipsas directiones* a b , a d, *quemlibet angulum* b a d *continentes : dico pondus* a *latum iri naturaliter per diametrum* a c *ipsius parallelogrammi* a b c d.

SIt enim primò vterque angulus *b a c*, *d a c* minor recto. Ducantur ad *a c* perpendiculares *b r*, *d m*; excitatâque ad ipsam *a c* perpendiculari *n a b*, ducantur ad ipsam *n b* perpendiculares *b n*, *d b*. Quoniam similia sunt triangula *b a r*, *d c m*, estque latus *b a* æquale lateri *d c*; etiam latus *b r*, seu *n a*, æquale erit lateri *d m*, seu *b a*. Porrò autem, cùm ex impetibus *a b*, *a d* secundùm ipsas directiones *a b*, *a d*, subnasci intelligantur respectiuè impetus secundùm *a c*; quorum (a) complementa sunt respectiuè itidem subnascentes impetus secundùm *a n*, *a b* perpendiculares ad ipsam *a c*; quiq; sunt (b) inter se, vt ipsæ *a n*, *a b*, atque adeò se inuicem adæquatè elidentes: solus supererit viuus impetus secundùm *a c*, ex prædictis impetibus secundùm *a b*, & *a d* compositus. Quòd autem nulli alteri directioni conuenire id possit, ita ostenditur. Sumatur enim quæcunque altera directio *a x*, quæ efficiat cum alterutro latere, vt *a d*, angulum *x a d* minorem angulo *c a d*. Excitetur ad *a x* perpendicularis *t a u*, ad quam ducantur perpendiculares *b t*, *d u*. Iam verò *a t* maiorem esse quàm *a n*, & *a u* minorem quàm *a b*, atque adeò ipsam *a t* maiorem esse ipsâ *a u*, facilè colligitur ex elementis. Quare, cùm ex prædictis impetibus *a b*, *ad*,



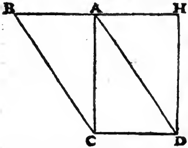
(a) *def. post 14. huius*. (b) 24. *huius*.

a d ſecundùm ipſas directiones *a b*, *a d* ſubnaſci intelligantur



reſpectiui impetus ſecundùm *a t*, *a u*, qui ita ſunt (a) inter ſe, vt ipſæ *a t*, *a u*; quique ſunt complementa partialium (b) impetuum ſecundùm *a x*, qui ſubnaſci intelliguntur ex illis impetibus ſecundùm *a b*, *a d*: non obtinebit pondus *a* ſolum impetum ſecundùm *a x*, qui nimirum aggregatur ex illis partialibus impetibus, reſpectiuè ſubnaſcentibus ex impetibus ſecundùm *a b*, & *a d*; ſed alium quendam præterea viuum impetum ſortietur ſecundùm *a t*, quantus ſcilicet eſt exceſſus impetus *a t* ſecundùm *a t*, ſupra impetum *a u* ſecundùm *a u*. Itaque pondus *a* citatum duplici illo impetu *a b*, *a d* ſecundùm ipſas directiones *a b*, *a d*, non feretur (c) naturaliter per ipſam *a x*, aut quamlibet aliam diuerſam à diametro *a c*; ſed omnino feretur per ipſam diametrum *a c*.

Sit ſecundò rectus alteruter angulus, vt *b a c*. Totus impetus ſecundùm *a c* ſubnaſci intelligetur ex impetu ſecundùm *a d*. Ductâ verò ad *b a h* perpendiculari *d h*; erit *a h* æqualis ipſi *d c*,

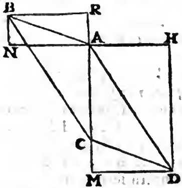


ſiue *a b*. Quare impetus *a h* ſecundùm *a b*, qui ſubnaſci intelligitur ex impetu *a d* ſecundùm *a d* (quiq; eſt complementum alterius impetus ſecundùm *a c*, ſubnaſcentis ex eodem impetu ſecundùm *a d*) æqualis erit toti impetui *a b* ſecundùm *a b*; atque adeò, propter mutuam adæquatam horum impetuum eliſionem, ſolus relinquetur viuus impetus ſecundùm *a c*, quem ſcilicet ſubnaſci intelligimus ex eo impetu ſecundùm *a d*.

Sit

(a) 24. *huius*. (b) *def poſt* 14. *huius*. (c) *poſtul*. 3. *in ſchol. poſt* 13. *huius*.

Sit tertiò alteruter angulus, vt *b a c*, maior recto. Ductis perpendicularibus, vt in appositâ figurâ: impetus quidem secundùm



a r, qui subnasci intelligitur ex impetu secundùm *a b*, elidet aliquatenus impetum secundùm *a c*, subnascentem ex impetu secundùm *a d*: sed complementa horum subnascentium impetuum; nimirum impetus *a n*, & *a b* secundùm ipsas *a n*, *a b* perpendiculares ipsi *a c* (qui vtique subnasci respectiuè intelliguntur ex impetibus *a b*, *a d* secundùm ipsas directiones *a b*, *a d*) æqualia, vt suprà, inter se erunt. Quare, propter mutuam adæquatam istorum complementorum elisionem, solus rursum viuus supererit impetus quidam secundùm *a c*. Quòd autem nulli alteri directioni conuenire id possit, simili discursu euincitur. Itaque constat propositum.

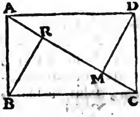
COROLLARIVM.

Hinc, si pondus *a* naturaliter feratur per diametrum *a c*, constabit è conuerso, ita fore impetum secundùm *a b* ad impetum secundùm *a d*, vt *a b* ad *a d*: si enim foret, vt *a b* ad quandam maiorem, vel minorem ipsâ *a d*, iam alia esset via diametralis ab ipso pondere *a* ineunda; quod est contra hypothesim.

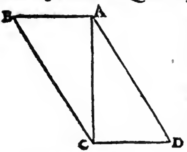
PROPOSITIO VIGESIMASEXTA.

Impetus autem secundùm a c *ita erit ad impetus secundùm* a b, *& secundùm* a d, *vt diameter* a c *ad ipsa latera* a b, a d.

Repetitis enim (quantùm spectat ad rem præsentem) figuris præcedentis propositionis: Si vterque angulus *b a c*, *d a c* fuerit minor recto; impetus secundùm *a c*, subnascens ex impetu secundùm *a b*, ita erit ad ipsum impetum (a) secundùm *a b*, vt *a r* ad *a b*; atq; item impetus secundùm eandem *a c*, subnascens ex impetu secundùm *a d*, ita erit ad ipsum impetum secundùm *a d*, vt *a m* ad *a d*. Sunt etiam inter se impetus secundùm *a b*, & secundùm *a d*, vt ipsæ *a b*, *a d*. Quare totalis impetus secundùm *a c* (nimirum aggregatus ex prædictis partialibus impetibus subnascentibus) ita erit ad impetus secundùm *a b*, & secundùm *a d*, vt summa ex *a m*, & *a r* ad ipsas *a b*, *a d*, nimirum vt diameter *a c*, (est enim *c m* æqualis ipsi *a r*, propter æqualitatem lateris *b a* cum latere *d c*, & similitudinem trianguli *b a r* cum triangulo *d c m*) ad ipsa latera *a b*, *a d*.



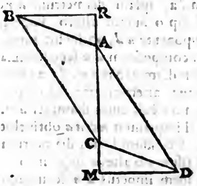
Sin verò alteruter angulus, vt *b a c*, fuerit rectus; rectus etiam erit angulus *d c a*. Quare impetus secundùm *a c*, subnascens ex impetu secundùm *a d* (qui vnicus eo casu reperitur) ita est ad ipsum impetum secundùm *a d*, vt *a c* ad *a d*. Est etiam impetus secundùm *a d* ad impetum secundùm *a b*, vt *a d* ad *a b*. Igitur impetus secundùm *a c* ita se habet ad impetus secundùm *a b*, & secundùm *a d*, vt diameter *a c* ad ipsa latera *a b*, *a d*.



(a) 24. *huius*.

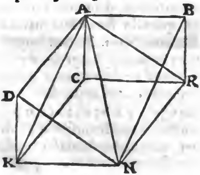
Si

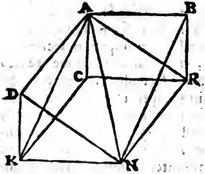
Si tandem alteruter angulus, vt *b a c*, maior fuerit recto; impetus secundùm *a r*, subnascens ex impetu secundùm *a b*, ita erit ad ipsum impetum secundùm *ab*, vt *a r* ad *a b*: atque item impetus secundùm *a c* (directè oppositus impetui secundùm *a r*) subnascens ex impetu secundùm *a d*, ita est ad ipsum impetum secundùm *a d*, vt *a m* ad *a d*. Sunt etiam inter se ipsi impetus secundùm *a b*, & secundùm *a d*, vt ipsæ *a b*, *a d*. Igitur impetus viuus secundùm *a c* (qui relinquitur ex elisione impetuum *a r*, *c m*) ita se habet ad impetus secundùm *a b*, & secundùm *a d*, vt *a m* minùs *a r* ad ipsas *a b*, *a d*, nimirum vt diameter *a c* (nam *c m* æqualis est, vt suprà, ipsi *a r*) ad ipsa latera *a b*, *a d*. Itaque constat propositum.



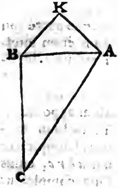
SCHOLIVM.

HVcusque dictis subnectere iuuat duas obseruationes. Prima est, quòd impetus ex tribus, aut pluribus impetibus primigenijs compositus, idem perinde reperitur, quoquo pacto ipsi impetus primigenij inuicem componantur. Citatum enim intelligatur pondus *a* tribus impetibus *a b*, *a c*, *a d* secundùm ipsas primarias directiones *a b*, *a c*, *a d*. Vnicum casum appositâ figurâ exhibeo, ne tædium afferam benigno lectori. Compleatur parallelogrammum *a b r c*, cuius diameter *a r*. Tum compleatur parallelogrammum *a r n d*, cuius diameter *a n*. Porrò, ex vi impe-





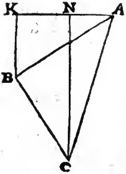
tuum *a b*, *a c*, obtinebit pondus *a* impetum compoſitum *a r* ſecundùm (a) ipſam diametrum *a r*. Aſſumpto autem altero impetu componente *a d*, obtinebit impetum compoſitum *a n* ſecundùm ipſam diametrum *a n*. Iam compleatur alterum parallelogrammum *a c k d*, cuius diameter *a k*. Ex vi impetuum *a c*, *a d* obtinebit pondus *a* impetum compoſitum *a k* ſecundùm ipſam diametrum *a k*. Oſtendendum ſupereſt, quòd aſſumpto altero impetu componente *a b*, competet ponderi *a* idem impetus *a n* ſecundùm eandem *a n*; adeò vt propterea idem impetus compoſitus reperiatur ſecundùm eandem directionem, quoquo pacto ipſi impetus primigenij inuicem componantur. Porrò autem id ipſum patebit, ſi oſtenderimus *a b n k* (iunctis nimirum *b n*, & *k n*) eſſe parallelogrammum, cuius diameter *a n*. Et quidem, cùm *r n* parallela ſit, & æqualis ipſi *a d*, hoc eſt *c k*; parallelæ itidem erunt, & æquales *k n*, & *c r*, hoc eſt *k n*, & *a b*. Quare parallelogrammum erit *a b n k*, cuius diameter *a n*. Cætera patent ex dictis. Quod autem oſtenſum eſt de tribus impetibus componentibus, idem valet de quotcunque alijs.



Altera obſeruatio eſt eiuſmodi; quòd magnitudo impetus ſubnaſcentis deſumenda omnino eſt ex impetu quodam ſecundùm naturalem ſuam directionem. Nam, dato triangulo rectangulo *a b c*; ex impetu primigenio *a c* ſecundùm hypothenuſam *a c* ſubnaſcetur vtique impetus *a b* (b) ſecundùm *a b*: atque item, facto triangulo rectangulo *a k b*; ex impetu primigenio *a b* ſecundùm hypothenuſam *a b* ſubnaſcetur impetus *a k* ſecundùm *a k*; qui tamen ſubnaſci non poſ-

(a) 26. *huius*. (b) 24. *huius*.

posset ex impetu *a b* secundùm *a b*, quatenus subnasci potente ex impetu primigenio *a c* secundùm *a c*. Tunc enim impetus ipse subnascens secundùm *a k*, verè subnasceretur ex impetu secundùm *a c*. At angulus *k a c* potest esse maior acuto; quo casu nullus subnasci potest impetus secundùm *a k* ex impetu secundùm *a c*.



Sin verò angulus *k a c* sit acutus: ductâ ad *a k* perpendiculari *c n*, constat ex elementis minorem fore *a n*, quàm *a k*. Quare impetus, subnasci potens secundùm *a k* ex impetu *a c* secundùm *a c*, non erit *a k*, sed *a n*. Itaque constat intentum.

ADMONITIO PRO SEQVENTIBVS THEOREMATIS.

QVoniam ponderum æqualium momenta, & impetus proportionalia sunt; quæcunque infrà dicturi sumus de impetibus grauium ex quiete, censeri vtique poterunt dicta de ipsis momentis grauium æqualium.

DEFINITIO.

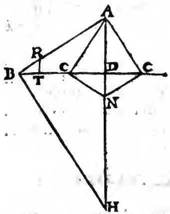
PLanum horizontale appellabimus illud, ad quod perpendicularis est directio cuiusdam grauis, liberè tendentis deorsum. Quæ quidem definitio valebit; seu grauia censeantur in vnum commune centrum conuergere, siue habere directiones inuicem parallelas.

PROPOSITIO VIGESIMASEPTIMA.

IMpetus grauium ex quiete super planis inæqualiter inclinatis, sed eandem eleuationem habentibus, sunt inter se in reciprocâ ratione longitudinum ipsorum planorum.

Sint

SInt plana inæqualiter inclinata *b a*, *a c*; ſed habentia eandem eleuationem *a d*, perpendicularem nempe ad planum horizontale *b c*. Dico impetum grauis cuiusdam *a* in plano *a b*, ita eſſe ad impetum eiusdem in plano *a c*, vt reciprocè *a c* ad *a b*. Excitentur enim ad *b a*, & *c a*, perpendiculares *b h*, *c n*, occurrentes ipſi *a d* protractæ, in *h*, & *n*. Ita erit impetus grauis *a* in *a b*, ſeu ſecundùm primariam directionem *a b*, ad impetum eiuſdem ſubnaſcentem in *a b*, ſeu ſecundùm directionem coactam *a b*, vt (a) hypothenuſa *a h* ad latus *a b* trianguli rectanguli *a b h*; ſiue (propter ſimilia triangula *a b h*, *a d b*) vt *a b* ad *a d*. Pari ratione, impetus grauis *a* in *a c*, ſeu ſubnaſcens ſecundùm *a c*, ita ſe habet ad eundem impetum grauis *a* in *a b*, ſeu ſecundùm primariam directionem *a b*, vt *a c* ad *a n*; ſiue (propter ſimilia triangula *a c n*, *a d c*) vt *a d* ad *a c*. Igitur ex æquo ſecundùm perturbatam rationem, ita ſe habet impetus grauis *a* in *a b* ad impetum eiuſdem in *a c*, vt reciprocè *a c* ad *a b*. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

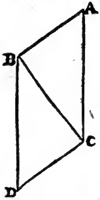
NOta verum id eſſe, quatenus graue illud conſtitutum intelligatur in ipſo punċto *a*, dictorum planorum communi. Adhuc tamen eadem veritas vniuerſim ſubſiſtet, vbiuis conſtituta intelligantur grauia ſupra dicta plana, dum impetus ex quiete grauium deorſum, tum æquales vbiuis putentur, tum etiam habere ponantur directiones parallelas. Si enim graue quodpiam *r* conſtitutum ſit in quodam puncto *r* ipſius plani *a b*, ſitque *r t* perpendicularis ad *b c*; erit, ex ſuperiùs demonſtratis, impetus grauis

(a) 24. *huius*.

grauis *r* in plano *rb* ad impetum eiusdem in plano *rt*, vt reciprocè *rt* ad *rb*; siue, propter parallelas, vt *ad* ad *ab*; nimirum vt impetus grauis *a* in plano *ab* ad impetum eiusdem in plano *ad*. Ponuntur autem æquales impetus grauium *a*, & *r*, secundùm perpendiculares *ad*, *rt*: Igitur æquales etiam sunt eorundem grauium impetus in ipsis planis *ab*, *rb*. Idem valet de grauibus vbiuis constitutis supra planum *ac*. Quare, vbiuis intelligantur constituta grauia supra dicta plana, eadem semper erit ratio impetuum in ipsis planis, nimirum æqualis rationi reciprocæ inter ipsorum longitudines.

PROPOSITIO VIGESIMAOCTAVA.

SI in sublimibus punctis laterum a b, b c *trianguli rectanguli* a b c, *ad horizontem, secundùm hypothenusam* a c, *perpendiculariter erecti, grauia qualibet constituta intelligantur: eorum impetus ex quiete in ipsis planis* a b, b c *ita erunt inter se, & ad impetum secundùm hypothenusam* a c, *vt ipsa latera* a b, b c, *& hypothenusa* a c. *Quod quidem verum est in vtrâque harum hypothesium; seu quòd æquales vbiuis sint impetus grauium deorsum, sed habeant directiones parallelas; seu quòd directiones habeant in vnum commune centrum conuergentes, sed impetus proportionati sint distantijs ab ipso centro.*

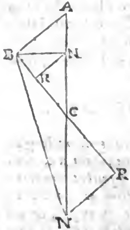


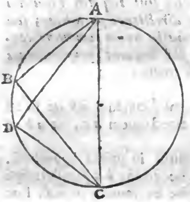
ET quidem, quòd impetus subnascens secundùm *ab* ita sit ad impetum secundùm primariam directionem *ac*, vt *ab* ad *ac*, satis patet ex superioribus.

De impetu autem in *bc* ita ostenditur in primâ hypothesi. Excitetur ad *bc* perpendicularis *cd*, occurrens *bd* parallelæ ipsi *ac*. Impetus in *bc* subnasci intelligetur ex impetu in *bd*, hoc est secundùm primariam directionem *bd*, qui vtique æqualis ponitur

nitur impetui in *a c*. Igitur impetus in *b c* ita est ad impetum in *b d*, siue ad impetum in *a c*, vt latus *b c* (a) trianguli rectanguli *b c d* ad hypothenusam *b d*, hoc est *a c*, ipsi *b d* æqualem. Quod &c.

In secundâ vero hypothesi ita euincitur. Si enim centrum fuerit ipsum punctum *c*, res patet ex ipsa hypothesi. Igitur sit quodpiam punctum *n*, vel existens inter ipsa puncta *a*, & *c*, vel alibi in ipsâ *a c* protractâ. Iungatur *b n*; & ad ipsam *b c* (si opus fuerit) protractam, ducatur perpendicularis *n r*. Impetus in *a n*, & in *b n* proportionati sunt ipsis distantijs *a n*, *b n*: impetus autem in *b n* ita est ad impetum subnascentem in *b r*, vt ipsa (b) hypothenusa *b n* ad latus *b r* trianguli rectanguli *b r n*. Igitur ex æquo, ita est impetus in *a n* ad impetum in *b r*, vt *a n* ad *b r*: vt autem *a n* ad *b r*, ita est (propter parallelas, aut triangula similia) *n c* ad *c r*: atque adeò vt *a n* ad *b r*, ita *a n*, plùs aut minùs *n c*, ad *b r*, plùs aut minùs *c r*. Quare ita est impetus in *a n* ad impetum in *b r*, vt *a n*, plùs aut minùs *n c*, ad *b r*, plùs aut minùs *c r*, nimirum vt *a c* ad *b c*. Quod erat &c.





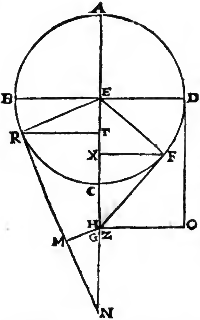
COROLLARIVM.

Colligitur hinc (stante alterutrâ dictarum hypothesium) quòd si ab imo, aut sublimi puncto circuli, ad horizontem perpendiculariter erecti secundùm diametrum *a c*, ducantur quælibet plana vsque ad circunferentiam inclinata, vt *c d*, *a b*; impetus cuiuslibet grauis *a* in *a b*, & cuiuslibet grauis *d* in *d c*, erunt inter

(a) 24. *huius*. (b) 24. *huius*.

inter se, & ad impetum cuiuslibet grauis *a* in *a c*, vt ipsæ *a b*, *d c*, & diameter *a c*. Nam, ductis *c b*, & *a d*, recti erunt in semicirculo anguli *a b c*, *a d c*. Igitur impetus quorumlibet grauium in *a b*, *b c*, *a d*, *d c*, erunt inter se, & ad impetum cuiuslibet grauis *a* in *a c*, vt ipsæ *a b*, *b c*, *a d*, *d c*, & diameter *a c*.

PROPOSITIO VIGESIMANONA.

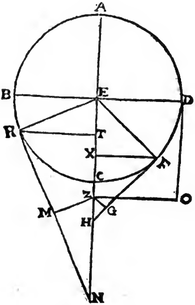


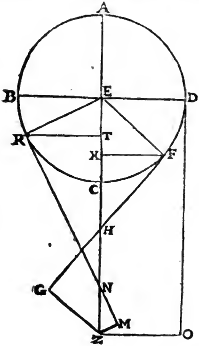
E*sto circulus, cuius diametri* a c, b d *sese ad rectos angulos intersecent in centro* e. *Assumptis autem in circumferentiâ duobus quibuslibet punctis* r, *&* f, *designetur etiam (excepto centro* e*) in alterutrâ diametro ad libitum protractâ, vt* a c, *quoduis punctum* z; *vnde ad contingentes* r n, f h *occurrentes prædictæ* a c *in* n, *&* h, *demittantur perpendiculares* z m, z g. *Dico ita fore inter se contingentes* r m, f g, *vt sinus recti* r t, f x, *perpendiculariter demissi ad diametrum* a c.

DVcatur enim ad contingentem *d o* perpendicularis *z o*, & iungatur *e f*. Porrò, ad vitandam confusionem linearum, eandem ipsam rem pluribus figuris exhibebimus, pro casuum diuersitate. Itaque puncta *r*, & *f* assumpta sint in circunferentiâ semicirculi *b c d*, ad cuius nempe partes designatum ponitur in diametro *a c* prædictum punctum *z*. Triplex autem fingi potest casus, relatè ad contingentem *f h*; vel quòd punctum *z* congruat cum puncto *h*; vel quòd cadat inter puncta *e*, & *h*; vel quòd existat vltra ipsum punctum *h*: Vbi ob-

 serua,

ferua, eiſdem planè verbis proceſſuram demonſtrationem; ſeu punctum z vbilibet locatum ſit inter puncta, e, x, c, b; ſeu congruat cum puncto x, aut cum puncto c. Et quidem in primo caſu, etiam punctum g congruet cum puncto h. Quare, propter ſimi-

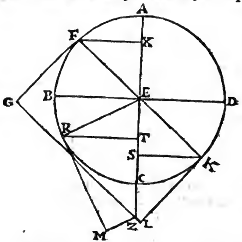




litudinem triangulorum, ita erit eh, ſiue ez, hoc eſt do ad fh, aut fg, vt ef, ſiue de ad fx. In alijs verò duobus caſibus, rurſum propter ſimilitudinem triangulorum, ita erit eh ad fh, & zh ad hg, vt ef, ſiue ed ad fx: Quare diuidendo, aut componendo, ita erit pariter ez, ſeu do ad fg, vt ef, ſeu de ad fx. Pari ratione, ſi iungatur er, ita oſtendetur eſſe do ad rm, vt de ad rt; & conuertendo, ita rm ad do, vt rt ad de. Igitur ex æquo, ita erit contingens rm ad contingentem fg, vt ſinus rectus rt ad ſinum rectum fx.

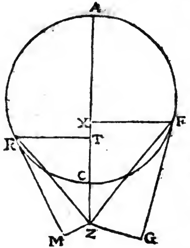
Quòd

Quòd si punctum *f* assumptum fuerit in circumferentiâ alterius semicirculi *b a d*: protractâ *f e* vsque ad circumferentiam in *k*,



demittatur ad contingentem *k l* perpendicularis *z l*, & ad diametrum *a c* perpendicularis *k s*. Constat ex elementis, æquales fore ipsas *k l*, *f g*, atque item *k s*, *f x*. Ostendetur autem, vt suprà, ita esse contingentem *r m* ad contingentem *k l*, vt sinus rectus *r t* ad sinum rectum *k s*. Igitur ita etiam erit rursum contingens *r m* ad contingentem *f g*, vt sinus rectus *r t* ad sinum rectum *f x*.

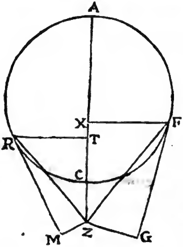
Postremò, si vtrunque punctum *r*, & *f* assumptum fuerit in circumferentiâ alterius semicirculi *b a d*, idem pariformiter euincetur. Itaque constat propositum.



PROPOSITIO TRIGESIMA.

Stante alterutrâ iam dictarum hypothesium; vel quòd æquales vbiuis sint impetus grauium deorsum, sed habeant directiones parallelas; vel quòd directiones habeant in vnum commune centrum conuergentes, sed impetus proportionati sint distantijs ab ipso centro: Si duo qualibet grauia f, *&* r *constituta intelligantur in circumferentiâ cuiusuis circuli, ad horizontem perpendiculariter*

erecti ſecundùm diametrum a c; *eorum impetus ex quiete ſecundùm contingentes, ita erunt inter ſe, vt ſinus recti* f x, r t, *perpendiculariter demiſſi ad diametrum* a c.



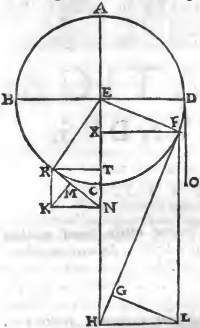
ET quidem pro ſecundâ hypotheſi, centrum commune ſit *z*, quod alicubi reperietur in diametro *a c* ad libitum protractâ. Iungantur *z f*, & *z r*; ſintq; *z g*, *z m* perpendiculares contingentibus *f g*, *r m*. Iam verò, impetus ſubnaſcens ſecundùm *f g* ita erit (a) ad impetum primigenium ſecundùm *f z*, vt *f g* ad *f z*. Ponitur etiam impetus primigenius ſecundùm *f z* ad impetum primigenium ſecundùm *r z*, vt *f z* ad *r z*. Impetus autem primigenius ſecundùm *r z* ita eſt (b) ad impetum ſubnaſcentem ſecundùm *r m*, vt *r z* ad *r m*. Igitur ex æquo, ita eſt impetus ſubnaſcens ſecundùm *f g* ad impetum ſubnaſcentem ſecundùm *r m*, vt contingens *f g* ad contingentem *r m*, ſiue (per præcedentem) vt ſinus rectus *f x* ad ſinum rectum *r t*. Quod erat demonſtrandum.

Pro primâ autem hypotheſi, ſeſe ad rectos angulos interſecent in centro *e* diametri *a c*, *b d*. Puncta autem *f*, & *r* aſſumpta ſint in circumferentiâ ſemicirculi inferioris *b c d*. Itaque contingentes *f h*, *r n* occurrant diametro *a c* protractæ, in *h*, & *n*. Ducatur quælibet *d o* parallela ipſi *a c*, ad quam demittantur perpendiculares *f x*, *r t*: completiſque rectangulis *f x h l*, *r t n k*, ducantur ad *f h*, & *r n*, perpendiculares *l g*, *k m*; ac tandem iungantur *e f*, *e r*. Iam verò, propter ſimilitudinem triangulorum, ita erit *e f*, ſeu *d e* ad *f x*, vt *f h* ad *h x*, aut *l f*, hoc eſt vt

l f

(a) 24. *huius*. (b) 24. *huius*.

lf ad *fg*, nimirum vt impetus primigenius (a) secundùm *fl*



ad impetum subnascentem secundùm *fg*. Ponuntur autem æquales impetus primigenij secundùm *fl*, & secundùm *do*. Igitur ita est impetus primigenius secundùm *do* ad prædictum impetum subnascentem secundùm contingentem *fg*, vt *de* ad *fx*. Pari ratione, & conuertendo, ostendetur ita esse impetum subnascentem secundùm contingentem *rm* ad impetum primigenium secundùm contingentem *do*, vt *rt* ad *de*. Igitur ex æquo, ita erit impetus subnascens secundùm contingentem *rm* ad impetum subnascentem secundùm contingentem *fg*, vt sinus rectus *rt* ad sinum rectum *fx*. Quòd si alterutrum, aut vtrunque punctum *f*, & *r* assumptum fuerit in circunferentiâ semicirculi superioris *bad*, idem tamen euincetur adhibitâ methodo superioris propositionis. Itaque etiam in primâ hypothesi ita erunt inter se impetus secundùm contingentes, vt ipsi sinus recti *fx*, *rt* perpendiculariter demissi ad diametrum *ac*. Quod erat demonstrandum.

NEO-

(a) 24. *huius*.

NEO-STATICÆ
LIBER SECVNDVS.

SYNOPSIS.

Librum hunc paruæ molis haud minimè facies, erudite Lector. Primus Archimedes, alijque post ipsum non pauci conati sunt geometricè demonstrare æquilibrium in puncto sectionis reciprocam cum ponderibus brachiorum rationem exhibente. Plerisque tamen Geometris satisfactum non est. Cur autem voti compotes facti non sint huiusce rei indagatores, satis puto, ex hoc libro constabit. Nam demonstrat, in eâ solâ hypothesi verum id esse, quæ impetus grauium ex quiete proportionatos facit distantijs à centro communi ipsorum grauium. Præterea tum vniuersim, tum præsertim in communi hucusque hypothesi, quæ ex quacunque distantia prædictos impetus æquales facit, puncta æquilibrij geometricè assignat. Accedit etiam demonstratio de semper eodem grauitatis centro vniuscuiusque corporis vbilibet constituti.

DEFINITIONES.

1 Nomine libræ intelligimus rectam quandam inflexilem, omnis ex se grauitatis, ac motus expertem, quæ quidem, cæteroquin immobilis, verti posse duntaxat intelligitur circa vnum suum punctum.

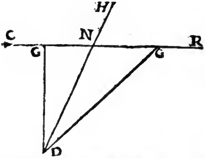
2 Punctum autem eiusmodi appellabimus centrum motus.

3 Centrum æquilibrij dicimus punctum illud libræ, quod ipsum si fuerit centrum motus, pondera impetu aliquo citata, ab extremis libræ appensa, siue in ipsius extremis constituta, manebunt in suo situ quieta, nimirum propter adæquatam hinc inde virium elisionem. Siue, centrum æquilibrij est illud punctum libræ, per quod, secundùm naturalem impetus compositi directionem, citari intelligitur ad motum ipsa libra cum suis adiunctis ponderibus.

4 Libram horizontalem appellamus illam, ad quam perpendicularis est recta iungens centrum motus, & centrum commune grauium.

5 Centrum grauitatis dicimus punctum illud cuiuslibet grauis, per quod transit naturalis directio impetus compositi versùs centrum commune grauium; in quam nempe coire debere intelliguntur impetus naturales versùs ipsum centrum omnium simul partium eiusmodi grauis.

AXIOMATA.



1 Si recta quædam inflexilis *cr* cieatur impetu secundùm *nd*, aut *dn*, & ipsum eius punctum *n* dimoueri è suo loco non possit; manebit ipsa in suo situ immota.

2 Sin autem, manente fixo puncto *n*, cieatur impetu secundùm *gd*, aut *dg*, & ipsum eius punctum *g* dimoueri possit è suo

suo loco; vertetur ipsa circa punctum *n*: & quidem ad partes anguli *gnd*, aut anguli *gnb* (protractâ nimirum in *b* ipsâ *dn*) prout impetus fuerit vel secundùm *gd*, vel secundùm *dg*.

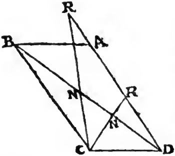
POSTVLATVM.

Existente *d* centro communi grauium, rectus sit angulus *rnd*: data sint etiam duo quælibet grauia *r*, & *c*, quorum primum



constitutum intelligatur in ipso puncto *r*. Postulamus reperiri posse in rectâ *rn* in infinitum protractâ quoddam punctum *c*, in quo si locetur alterum graue *c*, dictorum grauium æquilibrium habeatur in puncto *n*.

PROPOSITIO PRIMA.



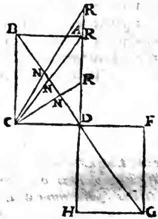
Si ab angulo c *cuiusuis parallelogrammi* a b c d *recta quædam* c r *ducatur, quæ secet diametrum* b d *in* n, *& latus* d a, *protractum, si opus fuerit, in* r: *Dico* c r *ita sectam esse in* n, *vt ratio* c n *ad* n r *æqualis sit rationi lateris* d a *ad* d r, *interiectam inter ipsam* c r, *& latus alterum* c d.

Nam, propter parallelas *cb*, *dr*, & æquales angulos ad verticem *n*, similia sunt triangula *cnb*, *rnd*. Quare ita erit *cn* ad *nr*, vt *cb*, siue *da* ad *dr*. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO SECVNDA.

SI *quoddam pondus* d, *constitutum in ipso angulo* cdr, *duplici impetu citatum intelligatur, vno secundùm* dc, *altero secundùm* dr. *Dico pondus illud, ex vi impetus compositi, rectam quandam descripturum, quæ ita secabit in* n *iunctam* cr, *vt ratio* cn *ad* nr *componatur ex ratione directâ ipsius* cd *ad* rd, *& ex reciprocâ impetus secundùm* dr *ad impetum secundùm* dc.



SIt enim impetus secundùm *dc* ad impetum secundùm *dr*, vt ipsa *dc* ad quandam *da* sumptam in ipsâ *dr*, si opus fuerit, protractâ. Compleatur parallelogrammum *abcd*, cuius diameter *db*. Describet pondus *d*, ex vi (a) impetus compositi, ipsam *db*: eritque, per præcedentem, iuncta *cr* ita secta in *n* à diametro *db*, vt ratio *cn* ad *nr* æqualis sit rationi lateris *da* ad *dr*, interiectam inter ipsam *cr*, & latus alterum *cd*. At ratio *da* ad *dr* componitur ex rationibus *da* ad *dc*, & *dc* ad *dr*. Igitur ex eisdem rationibus componitur ratio *cn* ad *nr*, nimirum ex reciprocâ impetuum, & ex directâ ipsius *cd* ad *rd*. Quod erat &c.

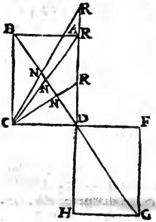
PROPOSITIO TERTIA.

IDem autem sequetur, mutatis mutandis, si directiones illorum impetuum sint quidem latera dc, dr, sed versùs partes oppositas basi cr.

NAm (protractis *ad*, *cd* in *b* & *f*) æquales sint *bd*, *fd* ipsis *ad*, *cd*: compleaturque parallelogrammum *fdhg*. Quoniam

(a) 25. *nostri primi.*

niam pondus *d* duobus impetibus citatum intelligitur, vno secundùm *c d*, seu *d f*, altero secundùm *r d*, seu *d b*, qui ita ponuntur inter se, vt *c d* ad *a d*, seu *d f* ad *d b*; describet vtique, ex vi (a) impetus compositi, diametrum *d g*. Hæc autem protracta versùs partes basis *c r* coibit, ex elementis, in alteram diametrum *d b*; ac propterea, per præcedentem, ita secabit in *n* iunctam *c r*, vt ratio *c n* ad *n r* componatur ex ratione directâ ipsius *c d* ad *r d*, & ex reciprocâ impetus secundùm *d r* ad impetum secundùm *d c*, siue impetus secundùm *r d* ad impetum secundùm *c d*; cum isti impetus prioribus respectiuè æquales statuantur. Hoc autem erat demonstrandum.



PROPOSITIO QVARTA.

Iam verò, recta inflexilis c r *consideretur tanquam libra, de cuius extremis* c, *&* r *pendere intelligatur pondus* d, *constitutum in ipso angulo* c d r, *cum impetibus secundùm* c d, *&* r d *versùs partes oppositas ipsi* c r. *Dico centrum æquilibrij esse in puncto* n, *quod ita diuidit rectam* c r, *vt ratio* c n *ad* n r *componatur ex ratione directâ ipsius* c d *ad* r d, *& ex reciprocâ impetus secundùm* r d *ad impetum secundùm* c d.

NAm (*fig. præc.*) duo prædicti impetus ostensi sunt omnino coalescere in impetum secundùm *d g*, seu *n d*. Si autem pondus *d* appensum intelligatur ex puncto *n*, cum solo impetu secundùm *n d*, nullatenus mouere poterit è suo situ libram *c r*; dum aliàs ipsa quidem libra *c r* vertibilis ponatur circa punctum *n*, sed ipsum tamen punctum *n* immobile in suo loco statuatur

(a) 25. *nostri primi*.

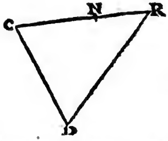
tur. Igitur idem sequetur si pondus *d* citatum intelligatur duplici prædicto impetu. Quare punctum *n* ipsum est centrum æquilibrij. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO QVINTA.

R*Vrsum idem pariformiter sequetur, si pondus* d *præditum intelligatur duplici impetu secundùm* d c, *&* d r, *nimirum versùs partes ipsius* c r.

NAm (stante eâdem figurâ) duo illi impetus, secundùm quos pondus *d*, in ipso angulo *c d r* constitutum, vrgere intelligitur ad motum libram *c r* per extrema ipsius puncta *c*, & *r*, ostensi sunt omnino coalescere in impetum secundùm *d b*, seu *d n*. Atqui, vt in præcedente, si pondus *d* solo impetu secundùm *d n* præditum intelligatur, nullatenus mouere poterit à suo situ libram *c r:* igitur neque id poterit, si duplici prædicto impetu præditum intelligatur. Quare in hoc etiam casu centrum æquilibrij est punctum *n*, quod nimirum ita diuidit rectam *c r*, vt ratio *c n* ad *n r* componatur ex ratione directâ ipsius *c d* ad *r d*, & ex reciprocâ impetus secundùm *d r* ad impetum secundùm *d c*. Quod erat demonstrandum.

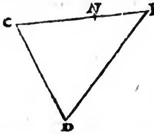
PROPOSITIO SEXTA.



S*I duo æqualia pondera* c, *&* r *constituta intelligantur in extremis libra* c r, *cum respectiuis impetibus secundùm* c d, r d, *aut* d c, d r: *Dico centrum æquilibrij fore in puncto* n, *quod ita diuidit ipsam* c r, *vt ratio* c n *ad* n r *componatur ex ratione directâ ipsius* c d *ad* r d, *& ex reciprocâ impetus secundùm* r d, *aut* d r, *ad impetum secundùm* c d, *aut* d c.

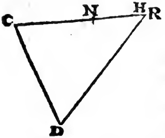
 Nam

NAm perinde ſe habet, ſeu duo prædicta pondera conſtituta intelligantur in extremis ipſius libræ *cr*, ſeu vbicunque in lineâ ſuarum directionum; dum (a) nimirum, vbicunque locentur, æquali vi motrice, & ſub eâdem omnino directione citare intelligantur ad motum ipſam *cr* per extrema ipſius puncta *c*, & *r*. Itaque conſtituta intelligantur in puncto *d*, quod eſt vtrarumque directionum concurſus. Rurſum perinde ſe habet, ſeu duo diſtincta pondera locata intelligantur in *d*, ſiue vnum tantùm cum duobus illis impetibus, & ſub eiſdem directionibus. At, ſi vnum tantùm ſit pondus, conſtat ex præcedentibus, quòd prædictum punctum *n* erit centrum æquilibrij. Igitur idem etiam ſequetur in iſto caſu. Quod erat demonſtrandum.



PROPOSITIO SEPTIMA.

IAm verò, ſiue æqualia, ſiue inæqualia pondera c *&* r *conſtituta intelligantur in extremis libræ* c r. *Dico centrum æquilibrij fore in puncto* n, *quod ita diuidit ipſam* c r, *vt ratio* c n *ad* n r *componatur ex ratione directâ ipſius* c d *ad* r d, *& ex reciprocâ momenti ponderis* r *ad momentum ponderis* c.



SI enim pondera ſint æqualia, res liquet ex præcedente, cùm ponderum æqualium ita ſe habeat momentum ad momentum, vt impetus ad impetum. Sin verò ſint inæqualia; in eodem tamen puncto, in quo æquilibrata cenſentur pondera inæqualia *c*, & *r*, conſiſtet æquilibrium, ſi loco ponderis

(a) *ax. 5. noſtri primi.*

ris *r* ſubſtitui intelligatur in *r* pondus alterum *h*, quod ipſum æquale ſit quidem ponderi *c*, ſed æquale habeat momentum ponderis *r* ſub eâdem prorſus directione. In eodem, inquam, puncto (a) conſiſtet æquilibrium, cùm in vtroque æquales adſint vires motrices, atque eædem prorſus directiones. Stante autem æquilibrio in *n* æqualium ponderum *c* & *h* in extremis libræ *cr* conſtitutorum, ratio *cn* ad *nr* componitur, vt iam nouimus, ex ratione directâ ipſius *cd* ad *rd*, ſiue *hd*, & ex reciprocâ momenti ponderis *h* ad momentum ponderis *c*. Igitur (cùm in eodem ipſo puncto *n* habeatur æquilibrium eiusdem ponderis *c*, & alterius inæqualis ponderis *r*) ex eiſdem rationibus componetur ratio *cn* ad *nr*, nimirum ex directâ ipſius *cd* ad *rd*, & ex reciprocâ prædicti momenti ponderis *h* ad momentum ponderis *c*, ſiue æqualis momenti ponderis *r* ad idem momentum ponderis *c*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Hinc, ijsdem ſtantibus, ratio cn *ad* nr *componitur ex ratione directâ ipſius* cd *ad* rd, *& ex reciprocâ tum ponderis ad pondus, tum impetus ſecundùm* rd *aut* dr, *ad impetum ſecundùm* cd *aut* dc.

Conſtat ex præcedente: Nam (b) ratio momenti ad momentum componitur ex homologis rationibus ponderis ad pondus, & impetus ad impetum.

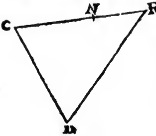
PROPOSITIO NONA.

Hinc rurſum, ſi impetus prædicti proportionentur diſtantijs à puncto communi concurſus ſuarum directionum, nimirum ipſis cd, rd; *centrum æquilibrij erit in puncto* n *diuidente libram* cr *in reciprocâ ratione ponderum.*

Nam

(a) *ax. 5. noſtri primi.* (b) *7. noſtri primi.*

NAm, habito æquilibrio in *n*, ratio *cn* ad *nr* componitur, per præcedentem, ex ratione directâ ipsius *cd* ad *rd*, & ex reciprocâ rum ponderis ad pondus, tum impetus secundùm *rd* aut *dr* ad impetum secundùm *cd* aut *dc*. Porrò autem prima harum rationum (a) eliditur per tertiam, dum impetus fuerint inter se, vt ipsæ distantiæ *rd*, *cd*. Igitur, hoc stante, sola superest (b) ratio reciproca ponderis in *r* ad pondus in *c*, cui æquetur prædicta ratio *cn* ad *nr*; vt propterea ipsa libra *cr* diuidatur per punctum æquilibrij in reciprocâ ratione ponderum. Quod erat demonstrandum.



LEMMA I.

Ratio composita ex ratione cuiuslibet a *ad quamlibet* b, *& ex inuersâ ipsius* b *ad eandem* a, *est ratio æqualitatis.*



SIt enim vt *b* ad *a*, ita *b* ad *c*. Erit *c* æqualis ipsi *a*. Ratio autem composita ex rationibus *a* ad *b*, & *b* ad *c*, hoc est *b* ad *a*, erit ipsa ratio æqualitatis *a* ad *c*. Quod erat propositum.

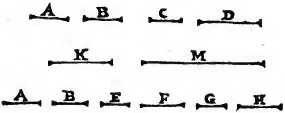
LEMMA II.

SI ratio æqualitatis fuerit vna rationum componentium, eadem manebit ratio, quæ composita dicitur, siue ratio æqualitatis interueniat ad componendum, siue non.

RAtio æqualitatis *a* ad *b*, & ratio *c* ad *d*, componant rationem *k* ad *m*. Dico, solam rationem componentem *c* ad *d* (exclusâ nempe ratione æqualitatis *a* ad *b*) æqualem esse præ-

(a) *lem. 1. seq.* (b) *lem. 2. seq.*

prædictæ rationi compoſitæ k ad m. Nam ratio k ad m, hoc eſt compoſita ex rationibus c ad d, & a ad b, æqualis eſt rationi rectanguli ex c in a ad rectangulum ex d in b. Atqui, propter



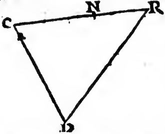
æquales altitudines a, & b, ratio rectanguli ex c in a ad rectangulum ex d in b, æqualis eſt rationi baſis c ad baſim d: igitur ratio compoſita k ad m æqualis eſt ſoli rationi componenti c ad d. Quòd ſi ratio k ad m compoſita fuerit ex ratione æqualitatis a ad b, & præterea ex rationibus e ad f, & g ad h; ſimiliter (excluſâ ratione æqualitatis a ad b) æqualis illa erit rationi compoſitæ ex reliquis componentibus e ad f, & g ad h. Ratio enim c ad d compoſita ſit ex rationibus e ad f, & g ad h. Igitur ratio k ad m compoſita erit ex ratione æqualitatis a ad b, & ex ratione c ad d. Quare, vtſuprà, ratio k ad m æqualis erit ſoli rationi componenti c ad d, hoc eſt rationi compoſitæ ex rationibus e ad f, & g ad h. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO DECIMA.

Nequit autem, ſtante æquilibrio in n, *ita eſſe* cn *ad* nr, *vt reciprocè pondus in* r *ad pondus in* c, *quin impetus ſecundùm prædictas directiones ſint proportionati diſtantijs à puncto communi concurſus.*

Nam,

NAm, ex præostensis, ratio *cn* ad *nr* componitur (a) ex ratione directâ ipsius *cd* ad *rd*, & ex reciprocâ tum ponderis in *r* ad pondus in *c*, tum impetus secundùm *rd* aut *dr*, ad impetum secundùm *cd* aut *dc*. Quare, vt eadem ratio *cn* ad *nr* æquetur soli rationi reciprocæ ponderis in *r* ad pondus in *c*; debent reliquæ duæ rationes componentes, nimirum prima, ac tertia, se inuicem (b) elidere, hoc est in rationem æqualitatis coalescere. Igitur, cùm prima ratio sit ipsius *cd* ad *rd*; tertia ratio, quæ est impetus secundùm *rd* aut *dr*, ad impetum secundùm *cd* aut *dc*, erit inuersè ipsius *rd* seu *dr*, ad *cd* seu *dc*, nimirum distantiæ ad distantiam. Itaque libra secari nequit per punctum æquilibrij in reciprocâ ratione ponderum, quin ipsorum impetus proportionentur distantijs à puncto communi concursus suarum directionum. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO VNDECIMA.

HInc, si æquilibrium ponderum, suapte naturâ versùs centrum aliquod commune tendentium, sit in puncto diuidente libram in reciprocâ ratione ipsorum ponderum, manifestum est, quòd impetus naturales ex quiete omnium grauium versùs centrum commune proportionantur ipsis distantijs.

SInt enim duo quælibet pondera vbilibet locata in punctis *c*, & *r*. Jungatur *cr*, quæ consideretur tanquam libra; sitque punctum *d* centrum commune grauium. Pondera locata in *c*, & *r* cum suis naturalibus impetibus ex quiete versùs centrum commune *d*, æquilibrata erunt, ex hypothesi, in quodam puncto *n* diuidente libram *cr* in reciprocâ ratione ipsorum ponderum. Nequit autem, per præcedentem, id esse, quin impetus ipsi versùs *d* propor-

(a) 8. *huius*. (b) *lem. 2. præc.*

portionentur distantijs *r d*, *c d*. Igitur, stante præmissâ hypothesi, impetus naturales ex quiete quorumlibet grauium versùs centrum commune proportionantur ipsis distantijs. Quod erat &c.

PROPOSITIO DVODECIMA.

Sin autem, stante æquilibrio in n, *statuantur æquales impetus secundùm* c d, r d, *aut* d c, d r; *ratio* c n *ad* n r *componetur ex ratione directâ ipsius* c d *ad* r d, *& ex reciprocâ ponderis in* r *ad pondus in* c.

NAm, ex præostensis, ratio *c n* ad *n r* componitur (a) ex ratione directâ ipsius *c d* ad *r d*, & ex reciprocâ momenti ponderis in *r* ad momentum ponderis in *c*. Atqui, stante æqualitate prædictorum impetuum, ita (b) est momentum ponderis in *r* ad momentum ponderis in *c*, vt pondus in *r* ad pondus in *c*. Igitur, eo stante, ratio *c n* ad *n r* componitur ex ratione directâ ipsius *c d* ad *r d*, & ex reciprocâ ponderis in *r* ad pondus in *c*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

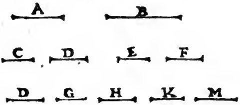
SI quædam ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componatur, quælibet rationum componentium composita erit ex datâ ratione compositâ, & ex alijs rationibus componentibus inuersim acceptis.

SIt enim ratio *a* ad *b* composita ex rationibus *c* ad *d*, & *e* ad *f*. Dico alterutram rationem componentem, vt *c* ad *d*, componi ex ipsâ ratione compositâ *a* ad *b*, & ex alterâ ratione componente inuersim sumptâ, quæ est ipsius *f* ad *e*. Quoniam enim ratio composita ex rationibus *e* ad *f*, & *f* ad *e*, est ratio æqualitatis; ipsa ratio *c* ad *d* ex his tribus rationibus componetur,

I quæ

(a) 7. *huius*. (b) 7. *nostri primi, & lem. 2. post nonam huius*.

quæ ſunt *c* ad *d*, *e* ad *f*, & *f* ad *e*. Atqui ratio *a* ad *b* compoſita eſt ex duabus prioribus, nimirum *c* ad *d*, & *e* ad *f*: igitur



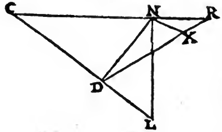
ratio componens *c* ad *d* componitur ex ipsâ ratione compoſitâ *a* ad *b*, & ex alterâ componente inuerſim ſumptâ, quæ eſt ipſius *f* ad *e*.

Quòd ſi ratio *a* ad *b* ex pluribus rationibus componatur, vt *c* ad *d*, *g* ad *h*, *k* ad *m*: oſtendetur adhuc, quòd quælibet rationum componentium, vt *c* ad *d*, componitur ex ipsâ ratione compoſitâ *a* ad *b*, & ex alijs duabus componentibus inuerſim ſumptis. Ratio enim *e* ad *f* compoſita ſit ex prædictis rationibus *g* ad *h*, & *k* ad *m*. Igitur ratio *a* ad *b* compoſita erit ex rationibus *c* ad *d*, & *e* ad *f*. Quare vt ſuprà, ratio *c* ad *d* componetur ex ipsâ ratione compoſitâ *a* ad *b*, & ex alterâ ratione componente inuerſim ſumptâ, quæ eſt ipſius *f* ad *e*. Quoniam verò ratio *e* ad *f* compoſita ponitur ex rationibus *g* ad *h* & *k* ad *m*; etiam conuertendo, ratio *f* ad *e* componetur ex rationibus *h* ad *g*, & *m* ad *k*. Igitur ratio componens *c* ad *d* componetur ex ipsâ ratione compoſitâ *a* ad *b*, & ex alijs duabus componentibus inuerſim ſumptis, quæ ſunt *h* ad *g*, & *m* ad *k*: Atq; ita, ſi plures adhuc fuerint rationes componentes. Igitur, ſi quædam ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componatur, quælibet rationum componentium compoſita erit ex datâ ratione compoſitâ, & ex alijs rationibus componentibus inuerſim acceptis. Quod erat demonſtrandum.

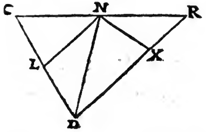
PRO-

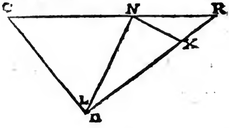
PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

SI impetus naturales grauium ex quiete versùs centrum commune statuantur in quacunque distantiâ æquales: demissis



ex puncto æquilibrij (qualiscunque sit angulus r n d *) rectis* n l, n x, *ad ipsas* c d, r d, *si opus fuerit, protractas; æquales sint respectiuè anguli* x n r, l n c, *ipsis* n d r, n d c. *Dico ita fore pondus in* r *ad pondus in* c, *vt reciprocè* n l *ad* n x.

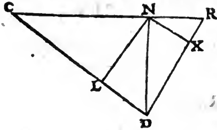




IUngatur *nd*. Ratio *cn* ad *nr* componetur (a) ex ratione directâ ipsius *cd* ad *rd*, & ex reciprocâ ponderis in *r* ad pondus in *c*. Igitur ratio ponderis in *r* ad pondus in *c* componitur (b) ex rationibus *cn* ad *nr*, & *rd* ad *cd*; siue ex rationibus *cn* ad *nr*, *rd* ad *nd*, & *nd* ad *cd*. Quoniam verò angulus *xnr* æqualis est angulo *ndr*, & angulus ad punctum *r* est communis; similia erunt triangula *xnr*, *ndr*: atq; item, cùm angulus *lnc* æqualis sit angulo *ndc*, & angulus ad punctum *c* communis; similia erunt triangula *lnc*, *ndc*. Quare, propter triangula similia, ratio *rd* ad *nd*, æqualis est rationi

(a) 12. *huius*. (b) 13. *huius*.

n r ad *n x*, & ratio *n d* ad *c d* æqualis rationi *n l* ad *c n*.



Igitur ratio ponderis in *r* ad pondus in *c* componetur ex rationibus *n l* ad *c n*, *c n* ad *n r*, & *n r* ad *n x*; siue æqualis erit rationi *n l* ad *n x*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Constat autem ex elementis, ipsas *n l*, *n x* perpendiculares fore ad *c d*, *r d*, si angulus *r n d* fuerit rectus; vt propterea, existente recto angulo *r n d*, pondera in *r*, & *c* constituta, sint inter se in reciprocâ ratione perpendicularium, ex puncto æquilibrij demissarum ad ipsas *c d*, *r d*.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

Existente puncto d *centro communi grauium* (fig. præc.) *rectus sit angulus* r n d, *habeatque pondus* r *ad quoddam alterum pondus* c *non minorem rationem, quàm sit ipsius* r d *ad* r n. *Protendatur* r n *in quantamlibet longitudinem* r n c; *in cuius extremis* r, *&* c *locata intelligantur prædicta pondera, cum suis naturalibus impetibus ex quiete versùs centrum ipsum commune* d. *Dico nullatenus fieri posse, vt illa pondera æquilibrata existant in* n, *si impetus naturales grauium ex quiete versùs centrum commune statuantur in quacunque distantiâ æquales.*

Si enim fieri potest, æquilibrata existant illa pondera in *n*, etiamsi æquales statuantur eorum impetus naturales ex quiete versùs centrum commune *d*. Demissis ad *c d*, *r d*, perpendicu-

cularibus *nl*, *nx*; habebit pondus in *r* ad pondus in *c* rationem (a) æqualem illi, quæ eſt perpendicularis *n l* ad perpendicularem *n x*, atque adeò minorem illâ, quæ eſt ipſius *n d* ad *n x*, ſiue, propter triangula ſimilia, ipſius *rd* ad *rn*. Hoc autem eſt abſurdum, cùm ratio ponderis in *r* ad pondus in *c* poſita ſit non minor eâ, quæ eſt ipſius *rd* ad *rn*. Igitur illa pondera habere nequeunt æquilibrium in *n*, ſi impetus naturales grauium ex quiete versùs centrum commune ſtatuantur in quacunque diſtantiâ æquales. Quod erat demonſtrandum.

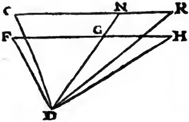
COROLLARIVM.

QVare, ſtante poſtulato huius libri, ſuſtineri non poteſt, quòd impetus naturales grauium ex quiete versùs centrum ſint in quacunque diſtantiâ æquales: & multò minùs, quòd in maiori diſtantiâ ſint minores; quod quidem facilè eruitur ex præmiſſis. Itaque in maiori diſtantiâ debent eſſe maiores.

ADMONITIO.

BReuitatis gratiâ: noſtram hypotheſim dicemus, quę vult impetus naturales grauium ex quiete versùs centrum proportionatos diſtantijs: communem autem, quæ iſtos impetus facit in quacunque diſtantiâ æquales.

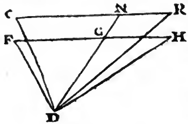
PROPOSITIO DECIMASEXTA.



SI duo grauia c, *&* r, *in extremis libræ* c r *conſtituta, æquilibrata exiſtant in puncto* n; *ipſa autem libra* c r *intelligatur (e.gr.) accedere ad centrum commune* d, *deſcribente puncto* n *rectam* n d: *in noſtrâ quidem hypotheſi perſeuerabit ſemper*

(a) *cor. prac.*

per æquilibrium in eodem puncto n; *secus autem in hypothesi communi.*



CLaritatis gratiâ: Facto accessu quolibet ad centrum commune *d*, transmutata intelligatur libra *cnr* in libram *fgh*. Iungantur *dc*, *df*, *dr*, *dh*, & *dgn*, quæ vnica erit recta. Erit *fg* ad *gh*, vt *cn* ad *nr*, siue (in nostrâ hypothesi) vt pondus *r* (a) ad pondus *c*, hoc est vt pondus in *h* ad pondus in *f*. Quare, cùm in nostrâ hypothesi pondera in *h*, & in *f* impetus habeant versùs centrum commune *d* proportionatos ipsis distantijs *hd*, *fd*; centrum æquilibrij erit (b) in puncto *g*, quod vtique respondet ipsi puncto *n*. Igitur in nostrâ hypothesi perseuerat semper æquilibrium in eodem puncto *n*. Quod erat priore loco demonstrandum.

Pro communi autem hypothesi: Quoniam, stante æquilibrio in *n*, ratio *cn* ad *nr* componitur (c) ex ratione directâ distantiæ *cd* ad distantiam *rd*, & ex reciprocâ ponderis in *r* ad pondus in *c*: si rursum æquilibrium eorundem ponderum censeatur esse in eo puncto *g* libræ *fh*; ratio *fg* ad *gh* (hoc est eadem ratio *cn* ad *nr*) componetur (d) ex ratione directâ *fd* ad *hd*, & ex reciprocâ ponderis in *h* ad pondus in *f*, hoc est ponderis *r* ad pondus *c*. Quare (demptâ communi ratione ponderis *r* ad pondus *c*) ratio *cd* ad *dr* æquabitur rationi *fd* ad *hd*. Absurdum autem id esse, facilè ostenditur ex elementis. Igitur æquilibrium nequit esse in puncto *g*, quod vtique respondet ipsi puncto *n*. Quare in communi hypothesi non perseuerat æquilibrium in eodem puncto *n*. Quod erat posteriore loco demonstrandum.

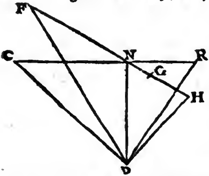
PRO-

(a) *9. huius*. (b) *9. huius*. (c) *12. huius*. (d) *12. huius*.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

SI duo grauia c, *&* r, *in extremis libræ horizontalis* c r *constituta, æquilibrata existant in puncto* n, *quod ipsum sit centrum motus; manente autem fixo puncto* n, *intelligatur ipsa libra ad horizontem inclinari: in nostrâ quidem hypothesi perseuerabit æquilibrium in eodem puncto* n, *vt propterea ipsa libra immota maneat in eo nouo situ; secus autem in hypothesi communi.*

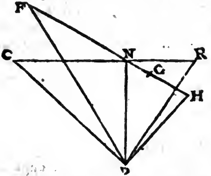
CLaritatis gratiâ: Libra *cnr* transmutata sit in libram *fnh*; sitque angulus *fnd* (iunctâ nimirum *dn*) maior angulo *cnd*. Iungantur *dc*, *df*, *dr*, *dh*. Erit *fn* ad *nh*, vt *cn* ad *nr*; siue, in nostrâ hypothesi, vt pondus *r* (a) ad pondus *c*, hoc est vt pondus in *h* ad pondus in *f*. Quare, cùm in nostrâ hypothesi pondera in *h*, & in *f* impetus habeant proportionatos ipsis distantijs *hd*, *fd*; centrum æquilibrij erit in eodem puncto *n*, atque adeò libra *fng* in eodem (b) ipso situ immota manebit. Quod erat priore loco demonstrandum.



Pro communi autem hypothesi: Quoniam, stante æquilibrio in puncto *n* libræ *cr*, ratio *cn* ad *nr* componitur (c) ex ratione directâ distantiæ *cd* ad distantiam *rd*, & ex reciprocâ ponderis in *r* ad pondus in *c*: si rursum æquilibrium eorundem ponderum censeatur esse in eodem puncto *n* libræ *fh*; ratio *fn* ad *nh* (hoc est eadem ratio *cn* ad *nr*) componetur (d) ex ratione directâ distantiæ *fd* ad distantiam *hd*, & ex reciprocâ ponderis in

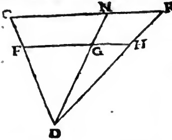
(a) 9. *huius*. (b) *ax.* 1. *huius*. (c) 12. *huius*.
(d) 12. *huius*.

in *b* ad pondus in *f*, hoc est ponderis *r* ad pondus *c*. Quare (demptâ communi ratione ponderis *r* ad pondus *c*) ratio *cd* ad *rd* æquabitur rationi *fd* ad *bd*. Absurdum autem id esse, facilè ostenditur ex elementis: Nam, existentibus prædictis, *fd* maior erit quàm *cd*, & *rd* maior quàm *bd*. Itaque ratio cuiusdam *fg* (maioris quàm *fn*) ad *gb*, componetur (a) ex ratione directâ *fd* ad *hd*, & ex reciprocâ ponderis in *b* ad pondus in *f*. Quare, in communi hypothesi, punctum illud *g* erit in libra *fb* centrum æquilibrij prædictorum ponderum; atque adeò non manebit libra *fb* immota in eo situ, sed vertetur (b) circà punctum *n* ad partes anguli *hnd*, nimirum vt perueniat ad congruendum cum ipsâ *nd*. Quod erat posteriore loco demonstrandum.



PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

SI duo grauia c, *&* r, *in extremis libra* c r *constituta, æquilibrata existant in* n; *alia verò æqualia respectiuè grauia* f, *&* h *intelligantur liberè suspensa filis* cf, rh. *In nostrâ quidem hypothesi (iunctis* fh, dn, *quæ se intersecent in puncto* g) *non habebitur horum posteriorum grauium æquilibrium in puncto* g, *nisi recta* fh *sit parallela ipsi* cr: *in communi autem hypothesi erit* g *centrum æquilibrij, etiamsi recta* fh *non sit parallela ipsi* cr.

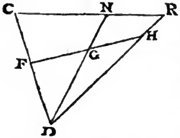


QVoniam enim punctum *d* statuitur pro centro communi grauium; rectæ *cf*, *rb* portiones erunt ipsarum *cd*, *rd*. Porrò

(a) 12. *huius*. (b) *ax*. 2. *huius*.

Porrò autem in noſtrâ hypotheſi: Si prædicta grauia *f*, & *h* æquilibrata exiſtant in *g*, ita (a) erit *fg* ad *gh*, vt pondus *h* ad pondus *f*, ſiue vt pondus *r* ad pondus *c*, hoc eſt vt *cn* ad *nr*. Quare, ex elementis, *fg* parallela erit ipſi *cn*. Quod erat priore loco demonſtrandum.

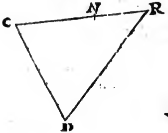
Pro communi autem hypotheſi: Quoniam pondera *f*, & *h* perinde incitant ad motum libram *cr*, atque ipſa pondera *c*, & *r*;



cùm vtrobique adſint æquales impetus æqualium reſpectiuè ponderum, ſub eiſdem reſpectiuè directionibus; vis tractiua erit (b) vtrobique ſecundùm eandem *dn*, hoc eſt *dg*. Quare, in communi hypotheſi, punctum *g* erit centrum æquilibrij ponderum *f*, & *h*, in extremis libræ *fh* conſtitutorum; ſeu recta *fh* parallela ſit ipſi *cr*, ſeu non. Quod erat poſteriore loco demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMANONA.

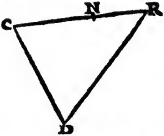
I*N noſtrâ hypotheſi: Si duo grauia* c, *&* r, *in extremis libræ* c r *conſtituta, æquilibrata exiſtant in* n, *perinde ſe habebunt, quo ad vim citandi ipſam* c r *ad motum versùs centrum commune* d, *ac ſi conſtituta eſſent in ipſo puncto* n *cum impetu ipſis naturaliter ex eo puncto conueniente versùs ipſum centrum commune* d.



NAm conſtat, quòd vis incitatiua ad motum erit (c) ſecundùm *nd*. Rurſum etiam patere ſatis poteſt ex ſuperioribus, quòd impetus iſte ſecundùm *nd* erit vt ipſa *nd* ad *cd*, & *rd*, repræſenta-

(a) 9. *huius*. (b) *ax.* 5. *noſtri primi*. (c) *def.* 3. *huius*.

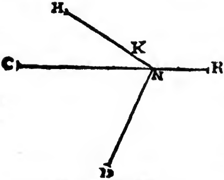
tiuas impetuum naturalium ex quiete versùs centrum commune *d* ex ipsis punctis *c* & *r*. Nam libra *c r* descendet secundùm *n d* vsque ad centrum *d* (quantùm est ex vi primorum impetuum naturalium suorum ponderum *c* & *r*, in ipsis punctis *c* & *r* constitutorum) æquali ipso tempore, quo pondera *c* & *r* descenderent secundùm *c d*, & *r d* vsque ad idem centrum *d*. Manifestum est etiam, quòd in nostrâ hypothesi ponderibus *c* & *r* in puncto *n* constitutis idem impetus *n d* secundùm *n d* conueniret. Igitur in nostrâ hypothesi: Si duo grauia *c* & *r*, in extremis libræ *c r* constituta, æquilibrata existant in *n*, perinde se habebunt, quo ad vim citandi ipsam *c r* ad motum versùs centrum commune *d*, ac si constituta essent in ipso puncto *n* cum impetu ipsis naturaliter ex eo puncto conueniente versùs ipsum centrum commune *d*. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO VIGESIMA.

In nostrâ hypothesi vnicum est, ac semper idem cuiuslibet corporis, vbilibet extra centrum commune constituti, centrum grauitatis: secus verò in communi hypothesi.

Nam in nostrâ hypothesi, si duo quælibet grauia *c*, & *r* colligata intelligantur rectâ inflexili *c r*, æquilibrium habebunt (a) in quodam puncto *n* diuidente ipsam *c r* in reciprocâ ratione eorundem grauium; vbilibet constituta intelligatur libra *c r* extra centrum commune *d*. Rursùm etiam

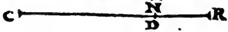


(a) *ex* 16., *&* 17. *huius*.

etiam perinde se habebunt (a) versùs centrum *d*, ac si constituta essent in puncto *n* cum impetu *nd* secundùm *nd*. Quare, assumpto alio quolibet graui *b*, vbilibet extra centrum *d* constituto, si iungatur *bn*, centrum æquilibrij trium prædictorum ponderum erit, iuxta nostram hypothesim, in quodam puncto *k* diuidente ipsam *bn* in reciprocâ ratione duorum simul grauium *c*, & *r* ad graue *b*. Atque ita consimiliter, si plura adhuc grauia colligari inuicem intelligantur. Porrò autem centrum æquilibrij ipsum erit centrum grauitatis, si ex quotcunque grauibus, hoc est ex quotcunque partibus, vnum aliquod graue componi intelligatur. Quare in nostrâ hypothesi vnicum erit, ac semper idem centrum grauitatis cuiuslibet corporis, vbilibet extra centrum commune constituti. At verò in communi hypothesi, non idem haberi centrum æquilibrij, atque adeò centrum grauitatis cuiuslibet corporis, vbilibet extra centrum commune constituti, satis vtique patere potest ex (b) alibi ostensis. Quod erat propositum.

SCHOLIVM I.

Sin autem recta inflexilis *cr* cum suis adiunctis inæqualibus ponderibus *c*, & *r*, transire intelligatur per ipsum centrum commune *d*: in nostrâ dumtaxat hypothesi consistere alicubi



poterit quieta, si nimirum centrum æquilibrij *n* incidat in ipsum centrum (c) commune *d*. Eo enim casu satis patet adfutura hinc atq; hinc momenta ęqualia. At, in hypothesi communi, momentum ponderis maioris *c* maius semper erit momento ponderis minoris *r*; quodcunque tandem sit punctum ipsius *cr* incidens in centrum commune *d*. Quare nusquam poterit, in communi hypothesi, recta *cr* quieta consistere, dum scilicet grauia ipsa *c*, & *r* redacta intelligantur in ipsa planè puncta *c*, & *r*.

(a) 19. *huius*. (b) *ex* 16. *&* 17. *huius*.
(c) *ex* 7. *nostri primi, & lem.* 1. *post* 9. *huius*.

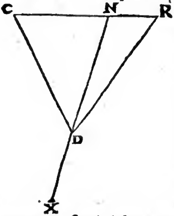
SCHOLIVM II.

EX dictis hactenus patet, centrum grauitatis, iuxta nostram hypothesim, in quacunque positione corporum, esse illud ipsum, quo huc vsque vsa est geometria: secus verò in communi; in quâ ita variatur, dum corpora accedunt ad centrum commune, vt in alia atque alia puncta, geometriæ huc vsque ignota, degeneret.

PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

SI grauia habeant impetus æquales, sed directiones habeant parallelas; habebitur nihilominus æquilibrium in puncto diuidente libram in reciprocâ ratione ipsorum ponderum.

COnstituta enim sint in extremis libræ *c r* duo grauia *c*, & *r* cum æqualibus impetibus, quorum directiones parallelæ sint cuidam *x n*, quæ in puncto *n* diuidat ipsam *c r* in reciprocâ



ratione prædictorum ponderum. Dico in eo puncto *n* futurum æquilibrium. Ducantur ad *n x*, in infinitum protractam, duæ quælibet *c d*, *r d*. Constat pondera *c*, & *r* æquilibrium habitura (a) in puncto *n*, si statuantur habere impetus versùs *d*, proportionatos ipsis distantijs *c d*, *r d*. Iam verò, si punctum *d* semper magis ponatur distans à puncto *n*; ipsæ *c d*, *r d* semper magis accedent ad æqualitatem, atque item ad parallelismum. Quare, si punctum *d* ponatur infinitè distans; considerari poterunt ipsæ *c d*, *r d*, tum vt inuicem æquales, tum etiam vt parallelæ. Constat autem mansurum semper æquilibrium in eodem puncto *n*. Igitur, si grauia habeant impetus æquales &c. Quod erat &c.

NEO-

(a) 9. *huius*.

NEO-STATICÆ
LIBER TERTIVS.

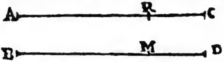
SYNOPSIS.

TRadiderat Galilæus, æqualia æqualibus temporibus velocitatis incrementa grauibus descendentibus accedere. Demonstramus in hoc libro nouam planè hypothesim. Scilicet, impetus in duabus æqualibus infinitesimis temporis, à graui descendente conceptos, eam inter se rationem habere, quæ est distantiarum à centro seu communi, seu particulari grauium. Sumptis verò æqualibus infinitesimis spatij, impetus inibi conceptos rationem habere compositam ex distantijs à centro, & ex particulis infinitesimis temporis, quæ in percurrendis spatiolis assignatis impenduntur.

PRÆNOTANDA.

COmmuni hoc vocabulo censemus definitiones, axiomata, ac postulata. Breuitatis amor id suasit; quia nempe hac ratione plura simul complecti poterimus citra confusionem. Iam sequuntur ipsa prænotanda.

1 Si duo mobilia *a* & *b* æquali tempore æquales rectas percurrant *a c*, *b d*; atque item æquali tempore duas quaslibet æqua-



les earundem portiones: manifestum vtique esse potest, quòd illa mobilia æquales obtinebunt impetus in duobus quibusvis ad æqualitatem correspondentibus punctis; hoc est, æqualiter distantibus à terminis *a* & *b*. Nimirum, designatis in *a c*, *b d* duabus quibuslibet æqualibus portionibus *a r*, *b m*, impetus mobilis *a* in *r* æqualis erit impetui mobilis *b* in *m*. Atque ita semper, si duo quæuis alia ad æqualitatem correspondentia puncta designata fuerint in ipsis æqualibus rectis *a c*, *b d*.

2 Hinc autem manifestum itidem fit, quòd dictorum mobilium impetus in duobus quibusuis ad æqualitatem correspondentibus punctis, vel æquales sibi ipsis constabunt sine vllo detrimento, aut incremento inibi accepto; vel æquale inibi detrimentum patientur; aut æquale incrementum acquirent.

3 Quòd si dicta mobilia æquales habere ponantur impetus ab initio motus, nimirum in punctis *a*, *b*; ac rursum fiat hypothesis, quòd in duabus quibuslibet correspondentibus infinitesimis æqualibus ipsarum *a c*, *b d*, acquirant, aut deperdant impetus proportionatos infinitesimis temporis, quibus illæ correspondentes infinitesimæ spatij percurri intelliguntur: mox enimverò constabit, æquali semper respectiuè impetu ipsas *a c*, *b d* à dictis mobilibus percursum iri. Quoniam enim æquales ponuntur impetus in *a* & *b*; æquales itidem (*ex* 2. *nostri primi*) futuræ sunt moræ temporis in ipsis æqualibus infinitesimis *a* & *b*, dum soli spectentur impetus ab initio positi. Quare (attento rursum, iuxta factam hypothesim, incremento, aut decremento impetus pro ratione morarum) constat sanè, æquali semper respectiuè impetu processura mobilia per ipsas æquales infinitesimas *a*, & *b*; vt propterea transire intelligantur ad proximas æquales infinitesimas cum im-

peti-

petibus æqualibus. Valebit autem eadem ratiocinatio pro ipsis proximis infinitesimis. Atque ita semper. Itaque æquali semper respectiuè impetu percurrentur à dictis mobilibus ipsæ *a c*, *b d*.

4 Vniuersim autem, vndecunque id oriatur, si prædicta mobilia æquali semper respectiuè impetu percurrant ipsas *a c*, *b d*: constat sanè, æquali tempore tum ipsas *a c*, *b d*, tum quaslibet earum correspondentes æquales portiones ab eisdem mobilibus percursum iri.

5 Porrò, claritatis gratiâ, nomen moræ adhibuimus (quod quidem notandum etiam venit pro sequentibus) ad significandam infinitesimam temporis, in quâ percurri intelligitur aliqua infinitesima spatij: non quòd inibi sine omni motu mobile subsistat; sed quia tota illa infinitesima temporis portio insumitur in percurrendâ illâ infinitesimâ particulâ spatij. Hâc ratione dicimus aliquem ad aliquod tempus in aliquâ regione morari: non quasi in eâ regione sine omni motu permaneat: sed quia pro eo tempore extra illam non egreditur.

Rursum adhibemus infinitesimas, seu temporis, seu spatij, hoc est particulas infinitè paruas, tanquam compendium à Geometris recentioribus inuentum ad euitandas operosas prolixasque demonstrationes circa curuas, quas prisci per inscriptionem, & circumscriptionem examinare consueuerant. Eorum vsum tutissimum, rationesq; certissimas inuenies passim apud clarissimos Geometras Liebnitium, Vallisium, Guidonem Grandum, Marchionem Hospitalium, Gabrielem Manfredum, atque alios, à quibus supersedeo, ne longiori digressione benigno lectori moram inijciam.

6 Quandoquidem manifestâ experientiâ constat, quòd grauia in motu nouos & nouos successiuè gradus impetus deorsum concipiunt; celeberrima fuit, ac receptissima hypothesis Galilæana, quæ in singulis æqualibus temporibus æqualia velocitatis deorsum incrementa eisdem attribuit. Hanc nos reijciemus. Interim autem, quoquo pacto grauium in motu augeri censeatur impetus deorsum; certè eorum motus per quamlibet infinitesimam spatij (eâ tamen exceptâ, vnde incipit ex quiete motus) assumi potest tanquam

quam æquabilis, citra periculum erroris. Descenderit enim graue *a* secundùm *a z* ex *a* in *b*. Impetus totalis in *b*, aggregatus nempe ex omnibus simul impetibus singularibus, successiuè à graui *a* conceptis in motu ex *a* in *b*, infinitam vtique dicit rationem



ad impetum singularem, conceptum ab ipso graui *a* in motu per infinitesimam *b*. Vbi nota (quod etiam valebit pro sequentibus) non appellari à me singularem prædictum impetum, quasi totus simul concipiatur, cùm & ipse successiuè agglomeretur in motu successiuo per ipsam infinitesimam *b*; sed solùm ad discrimen impetus totalis agglomerati in motu ex *a* in *b*. Quoniam igitur prædictus impetus singularis infinitè paruam rationem dicit ad impetum totalem iam aggregatum; constat sanè, haberi posse tanquam æquabilem motum ipsius grauis *a* per infinitesimam *b*. Eâdem ratione, si in *a b* designetur quædam alia infinitesima *m*, tanquam æquabilis haberi poterit motus grauis *a* per infinitesimam *m*. Quare, si æquales inter se fuerint ipsæ infinitesimę *b*, & *m*, censere poterimus (*ex 4. nostri primi*) ita fore moram infinitesimam temporis in *b*, seu per *b*, ad moram infinitesimam temporis in *m*, seu per *m*, vt reciprocè impetus totalis aggregatus ex *a* in *m* ad impetum totalem aggregatum ex *a* in *b*. Scilicet constat, defectum ab istâ ratione fore infinitè paruum, nimirum per quandam infinitesimam ipsarum talium morarum temporis. Quare, cùm vtraque prędictarum morarum sit portio infinitesima cuiusuis temporis sensibilis, seu temporis dicentis rationem non infinitè paruam ad aliquod tempus sensibile; si morę temporis per singulas equales infinitesimas spatiorum *a m*, *a b* prędictâ ratione determinentur, vt inde habeatur ratio temporis totalis ex *a* in *m* ad tempus totale ex *a* in *b*: perspicuum erit consideranti, defectum à veritate fore infinitè paruum, nimirum per quandam infinitesimam vnius temporis sensibilis, seu temporis dicentis rationem non infinitè paruam ad aliquod tempus sensibile; qualia vtique sunt ipsa tempora totalia ex *a* in *m*, & ex *a* in *b*. Hic autem defectus pro nullo habetur à geometris.

7 Quo-

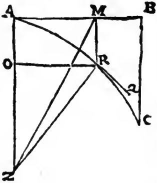
7 Quoniam frequens incidet mentio centri communis grauium, & centri particularis, subdere placet eorum definitiones præsenti instituto accommodatas. Itaque centrum commune est illud punctum, in quod omnia grauia sponte suâ feruntur. Hinc impetus singulares, successiuè à grauibus in motu concepti, ex suâ primigeniâ directione in eiusmodi punctum conuergunt. Centrum verò particulare est punctum illud in quolibet plano, quod est proximius centro communi; siue, in quod cadit à centro communi recta perpendicularis ipsi plano.

8 Impetum semel sponte conceptum, aut ab extrinseco impressum, postulamus æternum esse, nisi quatenus opposito impetu elidatur. Et primò quidem de impetu sponte concepto. Si enim alicubi desinere is deberet sine opposito impetu elidente, maximè id accideret in centro communi; ad quod nempe, ex suâ primigeniâ, eâque inuariatâ directione, respiciunt omnes impetus successiuè concepti ab aliquo graui liberè descendente. Falsum autem id esse, suaderi commodè potest exemplo centri particularis: neque enim inibi graue subsistit; sed vlteriùs tandiu progreditur, quoad vsque impetus successiuè aggregatus secundùm vnam directionem adæquatè elidatur ab impetu successiuè aggregato secundùm alteram oppositam directionem. Igitur impetus à graui conceptus versùs centrum commune, desumit quidem in ipsâ sui conceptione ab ipso tali centro directionem suam primigeniam; sed ita tamen vt, postquam semel conceptus est, iam non respiciat centrum, tanquam terminum, in quo motus desinat; sed eodem modo ipsum respiciat ac cætera puncta talis directionis, ab ipso centro communi vlteriùs in infinitum protractæ. Quare æternùm perseuerabit, nisi quatenus opposito impetu elidi intelligatur. Multò autem magis verum id erit de impetu extrinsecùs aduenien- te, qui neque in sui procreatione vllum speciale centrum agnoscit. Quòd autem dixi elisionem, & aliàs detrimentum, non ita intelligi volo, quasi causa proximè potens producere in mobili impetum oppositum, eius loco tantundem destruat impetus antiqui; sed quòd, siue hoc modo, siue per productionem impetus oppositi, al-

ter tantus impetus antiquus irritus maneat, perinde ac si foret consumptus. Quædam alia, ad intelligentiam sequentium theorematum non inutilia, opportuniùs leges post primam huius.

PROPOSITIO PRIMA.

Existente z *centro communi grauium, & angulo* b a z *recto; graue quodpiam* a *proiectum intelligatur secundùm* a b*: Describet sanè, dum libera sit via, curuam quandam, in quâ assumpto quolibet puncto* c, *demittatur ad* a b *perpendicularis* c b. *Si ergo fiat hypothesis, quòd graue* a *æquali ipso tempore descriptionis curuæ* a c, *perficeret ipsam* a b, *dum planum* a b *eius descensui restiterit; designato in curua* a c *quolibet puncto* r, *excitetur rursum ad* a b *perpendicularis* r m, *& iungantur* r z, m z. *Dico impetum à graui* a *conceptum in* r *versùs centrum commune* z, *ita esse ad impetum, quem idem graue concepisset in* m *versùs idem centrum* z, *vt distantia* r z *ad distantiam* m z.



Ducatur enim *r o* parallela ipsi *m a*, & occurrens rectæ *a z* in *o*. Erit *r o* perpendicularis ad *a z*, & æqualis ipsi *m a*. Quoniam igitur punctum *c* sumitur pro quouis puncto ipsius curuæ *a c*, assumptumque est in curuâ *a c* quoddam punctum *r*, vnde ad ipsam *a b* excitata est perpendicularis *r m*; perspicuum vtique euadit (stante hypothesi factâ) quòd graue *a* æquali ipso tempore descriptionis curuæ *a r*, perfecisset ipsam *a m*, dum planum *a m* eius descensui restitisset; & id quidem, vbicunque designatum fuerit punctum *r* in ipsâ curuâ *a c*. Quare, si planum *a b* parallelum sibi ipsi procedere intelligatur secundùm *a z*, existente semper *a b* perpendiculari ad *a z*, atque eâ ratione moueri, vt

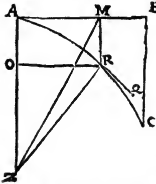
graue

graue *a* describens curuam *a c* reperiatur semper in ipso plano *a b*; constat sanè, quòd graue *a* (seu planum *a b* immobile ponatur, ac resistens descensui ipsius grauis *a*, seu comitari intelligatur ipsum graue *a* in suo descensu) æquali tempore æqualem respectiuè portionem percurret ipsius *a b*, atque (a) adeò æquali semper respectiuè impetu. Itaque impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm directionem *o r* parallelam ipsi *a b*, æqualis est impetui viuo, quem idem graue habuisset in *m* secundùm ipsam directionem *a b*. Quandoquidem autem verum id est, vbiuis sumpta fuerint puncta correspondentia *r*, & *m*; consequens planè est, vt impetus (b) viuus grauis *a* in *r*, & *m*, secundùm ipsas parallelas *o r*, *a b*, vel æqualis sibi ipsi constet, vel æquale patiatur detrimentum, siue æquale incrementum acquirat. Atqui impetus grauis *a* in *r* secundùm *o r*, tantum patitur detrimentum, quantus est impetus secundùm directionem *r o*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *r z*, concepto ibi in puncto *r*: atque item impetus viuus grauis *a* in *m* secundùm *a b*, tantum patitur detrimentum, quantus est impetus secundùm directionem *m a*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *m z*, concepto ibi in puncto *m*. Igitur duo isti subnascentes impetus, æquales inter se sunt; atque adeò ita sunt inter se, vt ipsæ rectæ æquales *r o*, *m a*. Est autem, propter angulum rectum *r o z*, ita impetus primigenius (c) secundùm *r z* ad impetum subnascentem secundùm *r o*, vt *r z* ad *r o*. Atque item, propter angulum rectum *m a z*, ita est impetus subnascens secundùm *m a*, ad impetum primigenium secundùm *m z*, vt *m a* ad *m z*. Quare, ex æquo, impetus primigenius secundùm *r z*, conceptus à graui *a* in puncto *r*, ita est ad impetum primigenium secundùm *m z*, quem idem graue concepisset in puncto *m*, vt distantia *r z* ad distantiam *m z*. Quod erat demonstrandum.

(a) *pranot.* 1. (b) *pranot.* 2. (c) 24. *nostri primi*.

ADMONITIO.

DVm dico impetum viuum grauis *a* in *r* ſecundùm *or*, non ita intelligere debes, quaſi velim adeſſe inibi impetum viuum ſecundùm *or* parallelam ipſi *ab*, diſtinctum ab altero impetu viuo ſecundùm *mr* parallelam ipſi *az*. Nam verè non alius eſt impetus viuus grauis *a* in *r*, niſi ſecundùm quandam *rq*, quæ contingat in *r* curuam deſcriptam, vt hîc ſupponimus. Quare impetus viuus in *r* ſecundùm *or*, atq; item impetus inibi viuus ſecundùm *mr*, illi vtique cenſeri debent, in quos adęquatè reſolui intelligitur (*prout in def. poſt* 14. *noſtri primi*) verus impetus viuus ſecundùm contingentem *rq*, qui propterea cenſeri poteſt (*prout in cor. poſt* 15. *eiuſdem libri*) tanquam ex illis compoſitus. Porrò impetum eiuſmodi viuum ſecundùm *or* clariùs, ac faciliùs menti exhibemus per motum grauis *a* ſupra planum *ab*, dum interim planum *ab* deſcendit modo explicato per *az*, ſemper ſibi ipſi parallelum. Obſeruatione eiuſmodi ſæpe opus erit in ſequentibus.



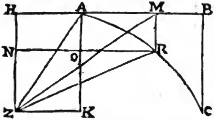
Rurſum, dum dico punctum & punctum, intelligo particulas infiniteſimas ſpatij inter ſe æquales. Quare, cùm in conceptione impetus naturalis deorſum attendendus omnino ſit temporis fluxus, non ſolùm in communi hypotheſi Galilæanâ, ſed etiam in noſtrâ infra declarandâ, ac demonſtrandâ; idcirco præcedens noſtrum theorema ſic interpretabimur. Impetus primigenius ſecundùm *rz*, conceptus à graui *a* in puncto *r*, nimirum in parte ſpatij infiniteſimâ *r*, hoc eſt in morâ infiniteſimâ temporis per infiniteſimam *r*, ita ſe habet ad impetum primigenium ſecundùm *mz*, quem idem graue concepiſſet in puncto *m*, hoc eſt in æquali parte ſpatij infiniteſimâ *m*, ſiue in morâ infiniteſimâ temporis

tis per ipsam æqualem infinitesimam *m*, vt distantia *rz* ad distantiam *mz*. Perspicuum est autem ex contextu, æquales infinitesimas *r*, & *m* accipiendas esse secundùm *am*, & secundùm *or*, cùm ibi sermo sit de motu grauis *a* supra planum *ab*, siue in suo situ immotum consistens, siue descendens modo explicato per *az*, semper sibi ipsi parallelum. Vbi rursum aduertes, nomine puncti & puncti intelligi à me particulas infinitesimas spatij inter se æquales, nisi tamen ex ipso contextu clarescat venire ibi duas quaslibet infinitesimas spatij, siue æquales, siue inæquales. Tota hæc obseruatio magni etiam est facienda pro sequentibus.

PROPOSITIO SECVNDA.

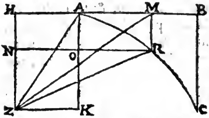
Quòd si, cæteris alijs manentibus, angulus b a z *fuerit obtusus, vel acutus: Dico nihilominus impetum conceptum à graui* a *in* r, *versùs centrum commune* z, *ita esse ad impetum, quem idem graue concepisset in* m *versùs idem centrum* z, *vt distantia* r z *ad distantiam* m z.

Sit enim primò angulus *baz* obtusus. Ductâ autem ad *ba* protractam perpendiculari *zb*, compleatur rectangulum *zbak*: tum ducatur *rn* parallela ipsi *mb*, occurrens rectæ *bz* in *n*, & *ak* in *o*. Erit *ron* perpendicularis ad *ak*, *bz*: atque item *ro*, *rn* æquales erunt ipsis *ma*, *mb*. Quoniam igitur (vt in præcedente propositione)



punctum *c* sumitur pro quouis puncto ipsius curuæ *ac*, designatumque est in curuâ *ac* quoddam punctum *r*, vnde ad ipsam *ab* excitata est perpendicularis *rm*; consequitur itidem, vt graue *a*, æquali ipso tempore descriptionis curuæ *ar*, perfecisset ipsam *am*, dum planum *am* eius descensui restitisset; & id quidem, vbi-

vbiuis ſumptum fuerit punctum *r* in ipsâ curuâ *ac*. Quare, ſi planum *ab* parallelum ſibi ipſi procedere intelligatur ſecundùm

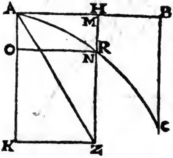


ak, exiſtente ſemper *ab* perpendiculari ad *ak*, atque eâ ratione moueri, vt graue *a*, deſcribens curuam *ac*, reperiatur ſemper in ipſo plano *ab*; conſtat ſanè, quòd graue *a* æquali tempore æqualem reſpectiuè portionem percurret ipſius *ab*, atque adeò (a) æquali ſemper reſpectiuè impetu; ſeu planum *ab* immobile in ſuo ſitu cenſeatur, ac reſiſtens deſcenſui grauis *a*, ſeu comitari intelligatur modo prædicto ipſum graue *a* in ſuo deſcenſu. Itaque impetus viuus grauis *a* in *r* ſecundùm *or* parallelam ipſi *ab*, æqualis eſt impetui viuo, quem idem graue habuiſſet in *m* ſecundùm ipſam *ab*. Et quoniam verum id eſt, vbiuis ſumpta fuerint puncta correſpondentia *r*, & *m*; conſequitur rurſum, vt impetus (b) viuus grauis *a* in *r*, & *m*, ſecundùm ipſas parallelas *or*, *ab*, vel æqualis ſibi ipſi conſtet, vel æquale patiatur detrimentum, ſiue æquale incrementum acquirat. Atqui impetus viuus grauis *a* in *r* ſecundùm *or* tantum patitur detrimentum, quantus eſt impetus ſecundùm *rn*, ſubnaſcens ex impetu primigenio ſecundùm *rz*, concepto ibi in puncto *r*: atque item impetus viuus grauis *a* in *m* ſecundùm *ab*, tantum patitur detrimentum, quantus eſt impetus ſecundùm *mh*, ſubnaſcens ex impetu primigenio ſecundùm *mz*, concepto ibi in puncto *m*. Igitur duo iſti ſubnaſcentes impetus æquales inter ſe ſunt; atque adeò ita ſunt inter ſe, vt ipſæ rectæ æquales *rn*, *mh*. Eſt autem, propter angulum rectum *rnz*, ita impetus primigenius (c) ſecundùm *rz* ad impetum ſubnaſcentem ſecundùm *rn*, vt *rz* ad *rn*. Atque item, propter angulum rectum *mhz*, ita eſt impetus ſubnaſcens ſecundùm *mh* ad impetum primigenium ſecundùm *mz*, vt *mh* ad *mz*. Quare, ex æquo, impetus primigenius ſecundùm *rz*, conceptus à graui *a* in puncto *r*, ita eſt ad im-

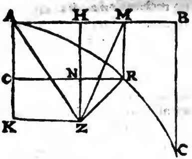
(a) *prænot.* 1. (b) *prænot.* 2. (c) 24. *noſtri primi.*

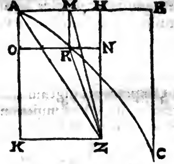
impetum primigenium ſecundùm *m z*, quem idem graue concepiſſet in puncto *m*, vt diſtantia *r z* ad diſtantiam *m z*. Atq; ita quidem, ſi angulus *b a z* fuerit obtuſus.

Sit autem ſecundò angulus *b a z* acutus: demiſsâque ad *a b* perpendiculari *z b*, compleatur rectangulum *z b a*: tum ducatur *r n* parallela ipſi *m h*, occurrens rectæ *h z* in *n*, & *a k* in *o*.



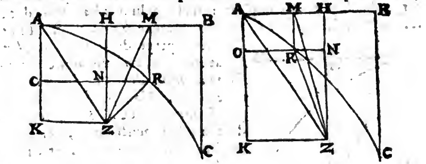
Erit *r n o* perpendicularis ad *a k*, *h z*: atque item *r o*, *r n*, æquales erunt ipſis *m a*, *m h*. Porrò triplex accidere poteſt caſus. Nam punctum *h* cadere poteſt inter puncta *a*, & *m*; vel incidere in ipſum punctum *m*; vel exiſtere vltra ipſum punctum *m*. Et, in ſecundo quidem caſu, etiam punctum *n* incidet in punctum *r*, atque adeò vnica erit recta ipſa *m r z* perpendicularis ad ipſas *a b*, *o r*: quo vtique caſu non eſſe locum argumentationi, ſatis patebit conſideranti. In reliquis autem duobus caſibus, repetito ſuperiore diſcurſu, concludetur itidem, quòd impetus viuus grauis *a* in *r*, & *m*, ſecundùm ipſas parallelas *o r*, *a b*, vel





æqualis ſibi ipſi conſtat, vel ęquale patitur detrimentum, ſiue æquale incrementum acquirit. Atqui impetus viuus grauis *a* in *r* ſecundùm *o r*, tantum patitur detrimentum (in primo caſu) quantus eſt impetus ſecundùm *r n*, ſubnaſcens ex impetu primigenio ſecundùm

cundùm *r z*; tantumque acquirit incrementum (in tertio casu) quantus est impetus secundùm *r n*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *r z*: atque item similiter impetus viuus grauis *a* in *m* secundùm *a b* tantum patitur detrimentum (in primo casu)



quantus est impetus secundùm *m b*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *m z*, tantumque acquirit incrementum (in tertio casu) quantus est impetus secundùm *m b*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *m z*. Igitur impetus isti subnascentes æquales inter se sunt, si sumantur, prout sibi mutuò respondent; atque adeò ita sunt inter se, vt ipsæ rectæ æquales, *r n*, *m b*. Est etiam in vtroque casu, propter angulum rectum *r n z*, ita impetus primigenius (a) secundùm *r z* ad impetum subnascentem secundùm *r n*, vt *r z* ad *r n*. Atque item in vtroque casu, propter angulum rectum *m b z*, ita est impetus subnascens secundùm *m b* ad impetum primigenium secundùm *m z*, vt *m b* ad *m z*: Quare, ex æquo, impetus primigenius secundùm *r z*, conceptus à graui *a* in puncto *r*, ita est ad impetum primigenium secundùm *m z*, quem idem graue concepisset in puncto *m*, vt distantia *r z* ad distantiam *m z*. Atque ita rursum, si angulus *b a z* fuerit acutus.

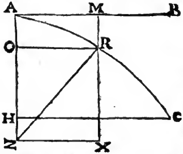
Igitur, etiamsi angulus *b a z* fuerit obtusus, vel acutus; nihilominus impetus conceptus à graui *a* in *r* versùs centrum commune *z*, ita se habet ad impetum, quem idem graue concepisset in *m* versùs idem centrum *z*, vt distantia *r z* ad distantiam *m z*. Quod &c.

PRO-

(a) 24. *nostri primi*.

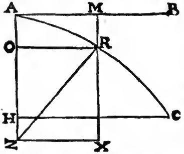
PROPOSITIO TERTIA.

SIn autem (existente recto angulo b a z , *ductâque* c h *parallelâ ipsi* b a , *& occurrente, vtique ad perpendiculum, recta* a z *in* h) *altera fiat hypothesis, quòd graue* a , *æquali ipso tempore descriptionis curuæ* a c , *perficeret ipsam* a h , *ex vi solius naturalis aglomerati impetus per planum* a z *perpendiculare ipsi* a b : *designato rursum in ipsâ curuâ* a c *quolibet puncto* r , *ducatur* r o *parallela ipsi* b a , *& occurrens (vtique ad perpendiculum) rectæ* a z *in* o , *iungaturque* r z . *Dico impetum conceptum à graui* a *in* r *versùs centrum commune* z , *ita esse ad impetum, quem idem graue concepisset in* o *versùs idem centrum* z , *vt distantia* r z *ad distantiam* o z .



DVctâ enim *z x* parallelâ ipsi *a b*, atque adeò perpendiculari ad *a z*, demittatur per *r* ad ipsas *z x*, *a b* perpendicularis *x r m*. Erit *m r* æqualis ipsi *a o*; & *r x* ipsi *o z*. Quoniam igitur punctum *r* sumitur pro quouis puncto ipsius curuæ *a c*, designatumque est in curuâ *a c* quoddam punctum *r*, ex quo ducta est *r o* parallela ipsi *b a*, & occurrens (vtique ad perpendiculum) rectæ *a z* in *o*; constat enimvero (stante posteriore hâc hypothesi) quòd graue *a*, æquali ipso tempore descriptionis curuæ *a r*, perfecisset ipsam *a o*, ex vi solius naturalis agglomerati impetus per planum *a z* perpendiculare ipsi *a b*; & id quidem, vbiuis designatum fuerit punctum *r* in ipsâ curuâ *a c*: Quare, si planum *a z* parallelum sibi ipsi procedere intelligatur secundùm *a b*, existente semper *a z* perpendiculari ad *a b*, atque eâ ratione moueri, vt graue *a*, describens curuam *a c*, reperiatur semper in ipso plano *a z*; constat sanè, quòd graue *a*

(siue planum *a z* comitari intelligatur ipsum graue *a* in descriptione curuæ *a c*; siue intelligatur retinere ipsum graue *a*, vt perpendiculariter cadat versùs centrum commune *z*, omni alio impetu subtracto) æquali tempore æqualem respectiuè portionem



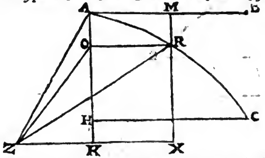
percurret ipsius *a z*, atq; adeò æquali (a) semper respectiuè impetu. Itaque impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm *m r* parallelam ipsi *a z*, æqualis est impetui viuo, quem idem graue habuisset in *o* secundùm ipsam *a z*. Quandoquidem autem verum id est, vbiuis sumpta fuerint puncta correspondentia *r* & *o*; consequens planè est, vt impetus (b) viuus grauis *a* in *o*, & *r* secundùm ipsas parallelas *a z*, *m r*, vel æqualis sibi ipsi constet, vel æquale patiatur detrimentum, siue æquale incrementum acquirat. Atqui impetus viuus grauis *a* in *o* secundùm *o z* tantum acquirit incrementum, quantus est impetus de nouo conceptus in ipso puncto *o* versùs centrum commune *z*: atque item impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm *m r*, tantum acquirit incrementum, quantus est impetus secundùm *r x*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *r z*, concepto ibi in puncto *r*. Igitur impetus secundùm *r x*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *r z*, æqualis est impetui, quem graue *a* concepisset in ipso puncto *o* versùs centrum commune *z*; atque adeò duo isti impetus sunt inter se, vt ipsæ rectæ æquales *r x*, *o z*. Est etiam, propter angulum rectum *r x z*, ita impetus (c) primigenius secundùm *r z* ad impetum subnascentem secundùm *r x*, vt *r z* ad *r x*. Quare, ex æquo, impetus versùs centrum commune *z*, conceptus à graui *a* in puncto *r*, ita est ad impetum, quem idem graue concepisset in *o* versùs idem centrum *z*, vt distantia *r z* ad distantiam *o z*. Quod erat demonstrandum.

PRO-

(a) *prænot.* 1. (b) *prænot.* 2. (c) 24. *nostri primi*.

PROPOSITIO QVARTA.

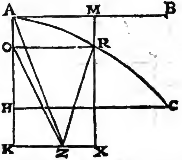
QVòd si angulus baz *fuerit obtusus, vel acutus: excitatâ ad* ab *perpendiculari* ka, *ducatur* ch *parallela ipsi* ba, *& occurrens (vtique ad perpendiculum) rectæ* ak *in* h. *Si ergo perstet hypothesis, quòd graue* a, *æquali ipso tempore de-*

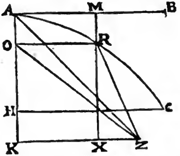


scriptionis curuæ ac, *perficeret ipsam* ah, *ex vi solius naturalis agglomerati impetus per planum* ak *perpendiculare ipsi* ab: *designato rursum in ipsâ curuâ* ac *quolibet puncto* r, *ducatur* ro *parallela ipsi* ba, *& occurrens (vtique ad perpendiculum) rectæ* ak *in* o, *iunganturque* rz, oz. *Dico adhuc impetum conceptum à graui* a *in* r *versùs centrum commune* z, *ita esse ad impetum, quem idem graue concepisset in* o *versùs idem centrum* z, *vt distantia* rz *ad distantiam* oz.

DVctâ enim *zkx* parallelâ ipsi *ab*, & occurrente (vtique ad perpendiculum) rectæ *ak* in *k*, demittatur per *r* ad ipsas *ab*, *zx* perpendicularis *mrx*. Erit *mr* æqualis ipsi *ao*, & *rx* ipsi *ok*. Quoniam igitur punctum *c* sumitur pro quouis puncto ipsius curuæ *ac*; designatumque est in curuâ *ac* quoddam punctum *r*, ex quo ducta est *ro* parallela ipsi *ba*, & occurrens (vtique ad perpendiculum) rectæ *ak* in *o*; perspicuum vtique fit (stante præmissâ hypothesi) quòd graue *a*, æquali ipso tempore descriptionis curuæ *ar*, perfecisset ipsam *ao*, ex vi solius naturalis agglomerati impetus per planum *ak* perpendiculare ipsi *ab*;

& id quidem, vbiuis designatum fuerit punctum *r* in ipsâ curuâ *a c*. Quare, si planum *a k* parallelum sibi ipsi procedere intelligatur secundùm *a b*, existente semper *a k* perpendiculari ad *a b*, atque eâ ratione moueri, vt graue *a*, describens curuam *a c*, reperiatur

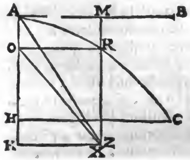




semper in ipso plano *a k*; constat sanè, quòd graue *a* æquali tempore æqualem respectiuè portionem percurret ipsius *a k*; atque adeò æquali semper (a) respectiuè impetu; seu planum *a k* comitari intelligatur ipsum graue *a* in descriptione curuæ *a c*; siue intelligatur retinere ipsum graue *a*, vt, ex vi solius naturalis agglomerati impetus, descendat per ipsum planum immotum *a k*. Itaq; impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm *m r* parallelam ipsi *a k*, æqualis est impetui viuo, quem idem graue habuisset in *o* secundùm ipsam *a k*. Et quoniam verum id est, vbiuis sumpta fuerint puncta correspondentia *r*, & *o*; consequens planè est, vt impetus (b) viuus grauis *a* in *r*, & *o* secundùm ipsas parallelas *m r*, *a k*, vel æqualis sibi ipsi constet, vel æquale patiatur detrimentum, siue æquale acquirat incrementum. Atqui impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm *m r*, tantum acquirit incrementum, quantus est impetus secundùm *r x*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *r z*: atque item impetus viuus grauis *a* in *o* secundùm *a k*, tantum acquirit incrementum, quantus est impetus secundùm *o k*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *o z*. Igitur duo isti impetus subnascentes, æquales inter se sunt; atque adeò ita sunt inter se, vt ipsæ rectæ æquales *r x*, *o k*. Est etiam, propter angulum

(a) *pranot. 1.* (b) *pranot. 2.*

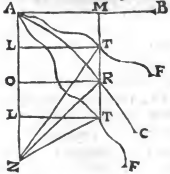
lum rectum $r x z$, ita impetus primigenius (a) secundùm $r z$ ad impetum subnascentem secundùm $r x$, vt $r z$ ad $r x$. Atq; item, propter angulum rectum $o k z$, ita est impetus subnascens secundùm $o k$ ad impetum primigenium secundùm $o z$, vt $o k$ ad $o z$. Igitur, ex æquo, ita est impetus, conceptus à graui a in puncto r versùs centrum commune z, ad impetum, quem idem graue concepisset in o versùs idem centrum z, vt distantia $r z$ ad distantiam $o z$.



Atque ita quidem, dum punctum x non incidat in ipsum punctum z. Eo autem casu, vnica erit recta ipsa $m r z$; atq; adeò simili planè ratione euincetur intentum, vt patebit consideranti. Quare constat propositum.

PROPOSITIO QVINTA.

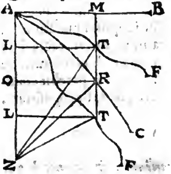
Porrò (*existente* z *centro communi grauium*, & *angulo* b a z *recto*) *graue quodpiam* a, *proiectum secundùm* a b, *describat curuam* a c. *Rursum etiam idem graue* a, *æquali impetu proiectum secundùm* a b, *describat aliam lineam* a f; *accedente nimirum*, & *impetui proiectionis secundùm* a b, & *impetibus naturaliter successiuè conceptis versùs centrum commune* z, *tertio quodam impetu secundùm parallelas ipsi* a z, *ad libitum vbilibet imminuto, aut adaucto, seu versùs partes ipsius puncti* z, *seu versùs partes directè oppositas. Assumpto autem in curuâ* a c *quolibet puncto* r, *demittatur ad* a b *perpendicularis* r m, *quæ secet ipsam* a f *in* t. *Si ergo fiat hypothesis, quòd graue* a, *æqua-*



(a) 24. *nostri primi*.

æquali tempore descriptionis curuæ a r, *descripserit etiam ipsam* a t: *Dico (iunctis* r z, t z) *impetum conceptum à graui* a *in puncto* r *versùs centrum commune* z, *ita esse ad impetum conceptum ab eodem graui in puncto* t *versùs idem centrum* z, *vt distantia* r z *ad distantiam* t z.

DVcantur enim ad *a z* rectæ *r o*, *t l* parallelæ ipsi *m a*. Æquales inter se erunt ipsæ *r o*, *t l*, ac perpendiculares ad *a z*. Quare, si planum *a b* comitari vnâ vice intelligatur graue *a* in



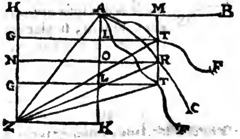
descriptione curuæ *a c*, existente semper *a b* perpendiculari ad *a z*; atque item alterâ vice, si idem planum *a b* comitari similiter intelligatur graue *a* in descriptione lineæ *a f*: constat sanè, quòd graue *a*, in vtroque casu, æqualem respectiuè portionem ipsius *a b* æquali tempore percurrere intelligetur. Itaque impetus (a) viuus grauis *a* in *r* secundùm *o r* parallelam ipsi *a b*, æqualis erit impetui viuo eiusdem grauis *a* in *t* secundùm *l t* parallelam eidem *a b*. Et quoniam verum id est, vbivis sumpta fuerint puncta correspondentia *r*, & *t*; consequens planè est, vt impetus viuus (b) grauis *a* in *r*, & *t*, secundùm ipsas parallelas *o r*, *l t*, vel æqualis sibi ipsi constet, vel æquale patiatur detrimentum, siue æquale incrementum acquirat. Atqui impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm *o r*, tantum patitur detrimentum, quantus est impetus secundùm *r o*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *r z*: atque item impetus viuus grauis *a* in *t* secundùm *l t*, tantum patitur detrimentum, quantus est impetus secundùm *t l*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *t z*. Igitur duo isti impetus subnascentes, æquales inter se sunt; atque adeò ita sunt inter se, vt ipsæ rectæ æquales *r o*, *t l*. Quare (vt suprà in præcedentibus) ita erit impetus primigenius secun-

(a) *prænot.* 1. (b) *prænot.* 2.

fecundùm *rz*, conceptus à graui *a* in puncto *r*, ad impetum primigenium fecundùm *tz*, conceptum ab eodem graui *a* in puncto *t*, vt distantia *rz* ad distantiam *tz*. Quod erat &c.

PROPOSITIO SEXTA.

Vòd si, cæteris alijs manentibus, angulus baz *fuerit obtusus, vel acutus: Dico nihilominus, impetum conceptum à graui* a *in puncto* r *versùs centrum commune* z, *ita esse ad impetum conceptum ab eodem graui in puncto* t *versùs idem centrum* z, *vt distantia* rz *ad distantiam* tz.

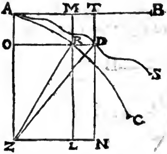


VNam duntaxat figuram exhibeo, pro angulo obtuso. Superfedeo etiam à demonstratione; quoniam ea similiter procedet, mutatis mutandis, atque in fecundâ huius.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Rursum etiam (existente z *centro communi grauium, & angulo* baz *recto) graue quodpiam* a, *proiectum fecundùm* ab, *describat curuam* ac. *Tum idem graue* a, *quolibet alio impetu proiectum fecundùm* ab *(qui etiam ad libitum in decursu imminui, aut adaugeri intelligatur, accedente nimirum vbilibet tertio quodam impetu fecundùm parallelas ipsi* ab, *seu versùs partes puncti* b, *seu versùs partes directè oppositas) describat aliam lineam* as. *Assumpto autem in curuâ* ac *quolibet*

bet puncto r, *ducatur* r o *parallela ipsi* b a, *&* *occurrens (vtique ad perpendiculum) ipsi* a z *in* o, *&* *secans* a s *in* d. *Si ergo altera fiat hypothesis, quòd graue* a, *æquali tempore descriptionis curua* a r, *descripserit etiam ipsam* a d: *Dico (iunctis* r z, d z) *impetum conceptum à graui* a *in puncto* r *versùs centrum commune* z, *ita esse ad impetum conceptum ab eodem graui* a *in puncto* d *versùs idem centrum* z, *vt distantia* r z, *ad distantiam* d z.



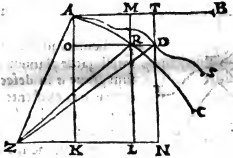
DVctis enim ad *a b* perpendicularibus *r m*, *d t*, compleantur rectangula *z a m l*, *z a t n*. Æquales inter se erunt ipsæ *r m*, *d t*; atque item *r l*, *d n*. Quare, si planum *a z* comitari vnâ vice intelligatur graue *a* in descriptione curuæ *a c*, existente semper *a z* perpendiculari ad *a b*; atque item alterâ vice, si planum *a z* comitari similiter intelligatur idem graue *a* in descriptione lineæ *a s*: constat sanè, quòd graue *a* æqualem respectiuè portionem ipsius *a z* æquali tempore percurrere intelligetur. Itaque impetus (a) viuus grauis *a* in *r* secundùm *m r* parallelam ipsi *a z*, æqualis erit impetui viuo grauis *a* in *d* secundùm *t d* parallelam eidem *a z*. Et quoniam verum id est, vbiuis sumpta fuerint puncta correspondentia *r*, & *d*; consequens vtique est, vt impetus (b) viuus grauis *a* in *r*, & *d*, secundùm ipsas parallelas *m r*, *t d*, vel æqualis sibi ipsi constet, vel æquale patiatur detrimentum, siue æquale incrementum acquirat. Atqui impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm *m r*, tantum acquirit incrementum, quantus est impetus secundùm *r l*, subnascens ex impetu primigenio secundùm *r z*, concepto ibi in puncto *r*: atque item impetus viuus grauis *a* in *d* secundùm *t d*, tantum acquirit incrementum, quantus est impetus secundùm *d n*, subnascens ex impetu

(a) *pranot.* 1. (b) *pranot.* 2.

petu primigenio ſecundùm *dz*, concepto ibi in puncto *d*. Igitur duo iſti ſubnaſcentes impetus, æquales inter ſe ſunt; atq; adeò ita ſunt inter ſe, vt ipſæ rectæ æquales *rl*, *dn*. Quare (vtſuprà in præcedentibus) impetus primigenius ſecundùm *rz*, conceptus ibi in puncto *r*, ita eſt ad impetum primigenium ſecundùm *dz*, conceptum ibi in puncto *d*, vt diſtantia *rz* ad diſtantiam *dz*. Quod erat &c.

PROPOSITIO OCTAVA.

Qvòd ſi, cæteris alijs manentibus, angulus baz *fuerit obtuſus, vel acutus: Dico nihilominus, impetum conceptum à graui* a *in puncto* r *versùs centrum commune* z, *ita eſſe ad impetum conceptum ab eodem graui in puncto* d *versùs idem centrum* z, *vt diſtantia* rz *ad diſtantiam* dz.



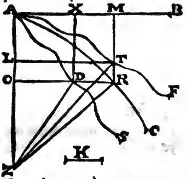
Hic etiam pro ſolo angulo obtuſo figuram exhibeo. Demonſtratio autem ſimiliter procedet, mutatis mutandis, atque in quartâ huius.

PROPOSITIO NONA.

Exiſtente z *centro communi grauium, & quolibet angulo* baz: *graue quodpiam* a, *proiectum ſecundùm* ab, *deſcribat pri-*

mâ vice curuam ac. *Tum ſecundâ vice, æquali impetu proie-ctum ſecundùm* ab, *deſcribat lineam quandam* af, *prout in quintâ, ac ſextâ huius. Tum etiam tertiâ vice, quolibet alio impetu proiectum ſecundùm* ab, *deſcribat lineam quandam* as, *prout in ſeptimâ, & octauâ huius. Aſſumpto autem in curuâ* ac *quolibet puncto* r, *demittatur ad* ab *perpendicularis* rm, *occurrens lineæ* af *in* t; *atque item ducatur recta* rd, *parallela ipſi* ba, *& occurrens lineæ* as *in* d. *Dico, quòd graue* a *æquali tempore deſcriptionis curuæ* ar, *alterutram lineam deſcripſit, vel* at, *vel* ad.

Sit enim primò angulus *baz* rectus. Ducatur etiam ad *ab* perpendicularis *dx*; atque item ad *az* ducantur, parallelæ ipſi *ba*, rectæ *tl*, *ro*. Æquales inter ſe erunt *dx*, *rm*; atque item *ro*, *tl*, quæ etiam perpendiculares erunt ad ipſam *az*. Tempus deſcriptionis curuæ *ar* ſit *k*. Iam intelligatur planum *ab* comitari graue *a* in deſcriptione curuæ *ar*, exiſtente ſemper *ab* perpendiculari ad *az*; atque item ſimul intelligatur planum *az* comitari ipſum graue *a* in deſcriptione eiuſdem curuæ *ar*, exiſtente ſemper *az* perpendiculari ad *ab*. Conſtat, quòd graue *a* tempore *k* perfeciſſe intelligetur portionem *or* ipſius *ab*, atque item portionem *mr* ipſius *az*.



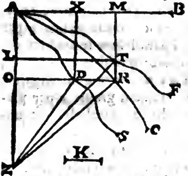
Quoniam verò motus compoſitus per curuam *ac* nequit eſſe determinatus, niſi quatenus determinati ſint ipſi motus componentes; conſequens planè eſt, vt vel vterq; motus componens, ſeorsùm acceptus; vel ſaltem alteruter ſit ex ſe determinatus, præciſiuè omnino ab altero motu componente. Qualiter autem intelligenda ſit iſta determinatio, mox conſtabit. Si ergo putamus, quòd motus grauis *a* per planum *ab*, procedens ſemper ſibi ipſi parallelum ſecundùm *az*, ita ſit ex ſe determinatus, vt graue *a*, dato quolibet

bet

bet tempore *k*, æqualem respectiuè portionem ipsius *a b* percurrere intelligatur, qualiscunque tandem censeatur, aut ponatur motus eiusdem grauis *a* per planum *a z*, procedens semper & ipsum sibi ipsi parallelum secundùm *a b*; facilè enimverò eruitur, quòd graue *a*, æquali tempore descriptionis curuæ *a r*, descripserit lineam *a t*. Eo enim stante: si planum *a b* comitari intelligatur graue *a* in descriptione lineæ *a f*, existente semper *a b* perpendiculari ad *a z*; dum graue *a* descripserit portionem *a t* ipsius *a f*, intelligetur vtique percurrisse portionem *l t* ipsius *a b*. Est autem *l t* æqualis ipsi *o r*: Quare æquali tempore percursa intelligetur portio *l t* ipsius *a b* in descriptione lineæ *a t*, atque portio *o r* eiusdem *a b* in descriptione curuæ *a r*. Igitur, æquali ipso tempore *k*, descripsisset graue *a* curuam *a r*, & lineam *a t*. Pari ratione: si putamus, quòd motus grauis *a* per planum *a z*, procedens semper sibi ipsi parallelum secundùm *a b*, ita sit ex se determinatus, vt graue *a*, dato quolibet tempore *k*, æqualem respectiuè portionem ipsius *a z* percurrere intelligatur, qualiscunque tandem ponatur motus eiusdem grauis *a* per planum *a b*, procedens semper & ipsum sibi ipsi parallelum secundùm *a z*; facilè rursum eruitur, quòd graue *a*, æquali tempore descriptionis curuæ *a r*, descripserit lineam *a d*. Eo enim stante: si planum *a z* comitari intelligatur graue *a* in descriptione lineæ *a s*, existente semper *a z* perpendiculari ad *a b*; dum graue *a* descripserit portionem *a d* ipsius *a s*, intelligetur vtiq; percurrisse portionem *x d* ipsius *a z*. Est autem *x d* æqualis ipsi *m r*: Quare æquali tempore percursa intelligetur portio *x d* ipsius *a z* in descriptione lineę *a d*, atq; portio *m r* eiusdem *a z* in descriptione curuæ *a r*. Igitur, æquali ipso tempore *k*, descripsisset graue *a* curuam *a r*, & lineam *a d*. Quare, si alteruter motus componens est eâ ratione ex se determinatus, præcisiuè omnino ab altero motu componente, intentum vtique habemus, quòd nempe graue *a*, æquali tempore descriptionis curuæ *a r*, alterutram lineam descripserit, vel *a t*, vel *a d*.

Itaque ostendendum adhuc superest, quòd alteruter motus com-

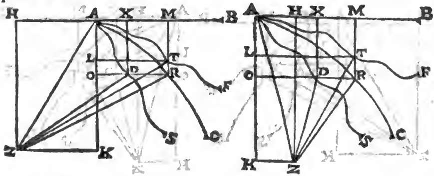
ponens sit prædicto modo ex se determinatus, præcisiuè omninò ab altero motu componente. Ad cuius nitidam demonstrationem, duo præmittere hîc oportet. Vnum est, quòd vterque impetus grauis *a* in ipso puncto *a* constituti, vnus proiectionis secundùm *a b*, & alter naturalis ex quiete conceptus versùs centrum commune *z*, est ibi adæquatè (a) viuus, propter angulum rectum *b a z*. Alterum est, quòd, licèt impetus primigenij versùs centrum commune *z*, in decursu concepti, non habeant directiones perpendiculares ipsi *a b*; singuli tamen resolui (b) intelliguntur in duos impetus, quorum vnus est secundùm rectam in directum positam cuidam parallelæ ipsi *a b*, vnde elidi intelligitur tantundem impetus secundùm parallelam eidem *a b*; & alter est secundùm rectam perpendicularem eidem parallelæ, vnde augeri intelligitur impetus secundùm parallelam ipsi *a z*, perpendiculari vtique ad *a b*: adeò vt propterea in quolibet puncto *r* ipsius curuæ *a c* duplex concipiatur adesse impetus viuus; vnus secundùm *o r* parallelam ipsi *a b*, residuus nempe post factas elisiones; & alter secundùm *m r* parallelam ipsi *a z* (perpendiculari vtique ad *a b*) aggregatus nempe ex prædictis impetibus subnascentibus secundùm perpendiculares ad parallelas eidem *a b*. His animaduersis: Si planum *a b* comitari intelligatur graue *a* in descriptione curuæ *a c*, existente semper *a b* perpendiculari ad *a z*; atque item simul, si planum *a z* comitari intelligatur idem graue *a* in descriptione eiusdem curuæ *a c*, existente semper *a z* perpendiculari ad *a b*: constat sanè ex præmissis, quòd motus compositus, quo curua *a c* describitur, componi intelligetur ex duobus prædictis motibus. Quoniam verò motus ille compositus oriri intelligitur ex duobus istis motibus componentibus, necessarium planè est, quòd alteruter motus com-



ponens

(a) 9. *nostri primi*. (b) *in def. post 14. nostri primi*.

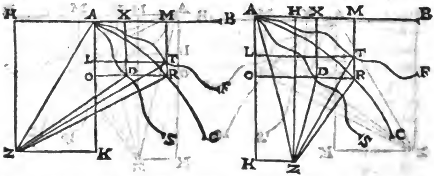
ponens sit prædicto modo ex se determinatus, præcisiuè omnino ab altero motu componente. Non dico, vtrunque seorsùm acceptum debere esse eâ ratione determinatum: sufficit enim ad rem



præsentem alterutrius determinatio prædicta; cùm ex alterutro taliter determinato possit alter motus componens (nisi aliud speciale obsit) suam vltimam determinationem accipere. Dico autem necessariam esse alterutrius determinationem prędictam; quia, hâc sublatâ, non erit quomodo incipiat ipse motus compositus; quia nempe non erit, quo determinato motu procedere debeat, seu planum *ab* secundùm *az*, seu planum *az* secundùm *ab*; cùm tamen ex intersectionibus ipsarum *ab*, *az*, tali quodam motu procedentium semper ad perpendiculum, describenda intelligatur ipsa curua *ac*. Igitur necessarium est, quòd alteruter horum motuum componentium sit prædicto modo ex se determinatus, præcisiuè omnino ab altero motu componente. Atque ita quidem, si angulus *baz* fuerit rectus.

Sit iam secundò angulus *baz* obtusus, vel acutus. Excitatâ autem ad *ab* perpendiculari *ka*, cui occurrat ad perpendiculum recta *zk*, compleatur rectangulum *zkab*. Ducatur etiam ad *ab* perpendicularis *dx*; atque item ad *ak* ducantur, parallelæ ipsi *ba*, rectæ *tl*, *ro*. Æquales inter se erunt *dx*, *rm*; atque item *ro*, *tl*, quæ etiam perpendiculares erunt ad ipsam *ak*. Iam verò, impetus proiectionis secundùm *ab*, tantum ab vsq; initio pati intelligetur detrimentum (si angulus *baz* fuerit obtusus)

ſus) aut acquirere incrementum (ſi angulus *b a z* fuerit acutus) quantus eſt impetus ſecundùm *a b*, ſubnaſcens ex impetu primigenio ſecundùm *a z* : alter autem impetus componens, erit



ſecundùm *a k*, ſubnaſcens nempe ex eodem impetu primigenio ſecundùm *a z*; qui vtique ita erit ad ipſum (a) impetum ſecundùm *a z*, vt *a k* ad *a z*. Porrò in ipſo decurſu, vel minuetur, vel augebitur impetus proiectionis ſecundùm *a b*, prout directiones impetuum, ſucceſſiuè conceptorum versùs centrum commune *z*, obtuſum, vel acutum angulum effecerint cum parallelis ipſius *a b*. Semper tamen motus componentes, in deſcriptione curuæ *a c*, intelligendi erunt ſecundùm parallelas ipſis *a b*, *a k*. Quare (ne tædium afferam benigno lectori) ſi loco plani, & rectæ *a z* ſubſtituatur planum, & recta *a k*, eiſdem planè verbis procedet demonſtratio, dum angulus *b a z* fuerit obtuſus, vel acutus, atque ſuprà, dum angulus *b a z* fuit rectus. Igitur, qualiſcunque ſit angulus *b a z*, graue *a*, æquali tempore deſcriptionis curuæ *a r*, alterutram lineam deſcripſit, vel *a t*, vel *a d*. Quod erat &c.

COROLLARIVM.

Hinc, iunctis *r z*, *t z*, *d z*; ita erit impetus (conſule etiam figuram primam huius prop.) conceptus à graui *a* in *r* versùs centrum commune *z*, ad alterutrum impetum, conceptum ab eodem

(a) 24. *noſtri primi*.

eodem graui, vel in *t*, vel in *d*, versùs idem centrum *z*, vt distantia *rz* ad alterutram distantiam, vel *tz*, vel *dz*. Quoniam enim graue *a*, ęquali tempore descriptionis curuæ *ar*, alterutram lineam descripsit, vel *at*, vel *ad*: si ponamus, quòd graue *a*, æquali tempore descriptionis curuæ *ar*, descripserit ipsam *at*; iam impetus primigenius secundùm *rz*, conceptus ibi in puncto *r*, ita erit ad impetum primigenium (a) secundùm *tz*, conceptum ibi in puncto *t*, vt distantia *rz* ad distantiam *tz*. Sin autem ponimus, quòd graue *a*, æquali tempore descriptionis curuæ *ar*, descripserit ipsam *ad*; iam impetus primigenius secundùm *rz*, conceptus ibi in puncto *r*, ita erit ad impetum primigenium (b) secundùm *dz*, conceptum ibi in puncto *d*, vt distantia *rz* ad distantiam *dz*. Itaque constat propositum.

SCHOLIVM I.

QVæ hactenus geometricè demonstrauimus, confirmari etiam possunt experimento sensuum. Nam, currente naui, si graue quodpiam demittatur ex summitate mali; eius tamen descensus perpendicularis nullatenus profectò alterari videbitur à latione horizontali; sed eodem modo apparebit, ac si nauis omnino consisteret.

SCHOLIVM II.

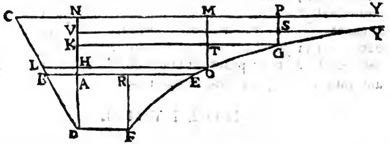
QVoniam præcedenti propositioni inniti debet doctrina fere omnis infrà tradenda: propterea initio libri quarti abunde leges, quæ vlteriùs desiderari hîc possent.

PROPOSITIO DECIMA.

SI quoddam pondus n *cieatur impetu secundùm* nd, *intelligaturque in motu versùs* d *acquisiturum è singulis infinitesi-*

(a) *5. & 6. huius*. (b) *7. & 8. huius*.

tesimis æqualibus ipsius n d *nouos gradus impetus (prioribus vtique retentis) proportionatos distantijs ab ipso puncto* d *: Dico nunquam fore vt pondus* n *perueniat in* d, *atque etiam in ipso vsque puncto* n *quietum permansurum. Ponitur autem, quòd primus impetus, quo potitur in parte infinitesima* n, *sit infinitè paruus, & ex se ineptus ad procreandum, longissimo quouis tempore finito, motum sensibilem.*



DVctâ enim perpendiculari *cn*, iungatur *cd*. Intelligatur etiam ex alterâ parte trianguli *cnd* curua quædam; ad quam demissâ *df* perpendiculari ipsi *nd*, si ex alio quouis puncto rectæ *nd* educatur perpendicularis *ae*, occurrens ipsi curuæ in *e*, ita sit *ae* ad *df*, vt reciprocè triangulum *cnd* ad trapezium *cnab*; protractâ nimirum in *b* ipsâ *ea*. Constat, quòd curua prædicta semper quidem accedet, sed nunquam tamen occurret rectæ *cny*, in infinitum protractæ. Rursum constat, quòd triangulum *cnd* repræsentabit impetus ponderis *n* in motu per *nd*; seu singulares acquisitos in singulis æqualibus infinitesimis partibus ipsius *nd*, seu totales aggregatos ex omnibus simul præcedentibus. Nam primus impetus in *n* ita est ad singularem impetum acquisitum in quauis æquali infinitesimâ *a*, vt *nd* ad *ad*, hoc est *cn* ad *ba*. Quare impetus totalis in *a* (nimirum ibi aggregatus ex omnibus impetibus successiuè illuc vsque acquisitis) ita erit ad impetum totalem in *d*, vt trapezium *cnab* ad triangulum *cnd*. Similiter figura *yndfey* repræsentabit tempora per

nd.

n d. Nam pars infinitesima temporis, quâ pondus *n* subsistere intelligitur, ante vlteriorem progressum, in parte infinitesimâ *d*, ita erit ad partem (a) infinitesimam temporis, quâ subsistit in quauis æquali infinitesimâ *a*, vt reciprocè impetus totalis in *a* ad impetum totalem in *d*, hoc est vt trapezium *c n a b* ad triangulum *c n d*, siue vt *d f* ad *a e*. Quare tempus totale ex *n* in *d*, aut ex *n* in *a*, ita erit ad tempus totale ex *a* in *d*, vt tota figura *y n d f e y*, aut portio interminata *y e a n y* ad portionem terminatam *a d f e*.

Iam verò ostendere oportet, quòd portio interminata *y e a n y* sit infinita, & infinities continens ipsam portionem terminatam *a d f e*. Diuisa enim sit *n d* bifariam in *a*: designatoque in *a n* quouis puncto *b*, ducatur per *b* ad *n d* perpendicularis *l o*, occurrens ipsi *c d* in *l*, & dictæ curuæ in *o*. Tum ex *d f* excitetur perpendicularis *f r*, occurrens *a e* in *r*; & ex *b o* perpendicularis *o m*, occurrens *n y* in *m*. Quoniam igitur rectangulum *c n d* ad rectangulum *c n b* ita se habet, vt *d n* ad *b n*; ita etiam erit dimidium rectanguli *c n d*, seu triangulum *c n d*, ad idem rectangulum *c n b*, vt dimidium ipsius *d n*, hoc est ipsa *d a*, ad eandem *b n*. Est autem ratio trianguli *c n d* ad rectangulum *c n b* minor ratione eiusdem trianguli *c n d* ad trapezium *c n b l*: igitur ratio *d a* ad *b n* minor est ratione dicti trianguli *c n d* ad trapezium *c n b l*. Atqui, ex naturâ propositæ curuæ, ita est *b o* ad *d f*, vt reciprocè triangulum *c n d* ad trapezium *c n b l*: igitur ratio *d a* ad *b n* minor est ratione *b o* ad *d f*. Quapropter rectangulum *n b o m* maius est rectangulo *a d f r*: atque adeò, diuisâ bifariam in *k* ipsâ *b n*, demissâque ad *o m* perpendiculari *k t*; rectangulum *k b o t*, dimidium ipsius *n b o m*, maius erit dimidio ipsius *a d f r*. Porrò autem, protractâ *k t* vsque ad prædictam curuam in *g*, demissâque ad *n y* perpendiculari *g p*; ostendetur similiter (nam punctum *b* sumptum est pro quouis puncto ipsius *a n*) quòd rectangulum *n k g p* maius est rectangulo *a d f r*. Quare, diuisâ bifariam in *u* ipsâ *k b*, demissâq; ad *g p* perpen-

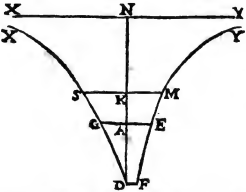
(a) *prænot. 6. huius, & 4. nostri primi.*

diculari *us*; erit similiter rectangulum *ukgs* (dimidium ipsius *nkgp*) maius dimidio ipsius *adfr*. Atque ita semper consimiliter. Itaque infinita est portio interminata *yeany*, vtpote infinita continens distincta rectangula, singula maiora dimidio ipsius *adfr*; atque adeò infinities etiam continebit ipsam portionem terminatam *adfe*. Quoniam igitur tempus totale ex *n* in *a* ita est ad tempus totale ex *a* in *d*, vt portio illa interminata *yeany* ad portionem terminatam *adfe*; infinitum erit tempus illud totale ex *n* in *a*, vt pote infinities continens ipsum tempus totale ex *a* in *d*. Quare pondus *n* nullo finito tempore perueniet vsque in *a*, & multò minùs vsque in *d*.

Assumptum est autem punctum *a* pro quouis puncto ipsius *nd*, designabili inter puncta *n*, & *d*: Igitur pondus *n* nullo finito tempore egredietur de puncto *n*, seu de parte infinitesimâ *n*; sed ibi semper morabitur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Sin verò ita res intelligatur, vt, designatis in rectâ nd *duobus quibusuis punctis* a *&* k, *ratio impetus singularis acqui-*



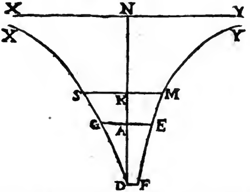
stti in parte infinitesimâ a, *ad impetum singularem acquisitum in æquali parte infinitesimâ* k, *componatur ex ratione directâ distantiæ*

stantia a d *ad distantiam* k d, *& ex reciprocâ impetus totalis in* k *ad impetum totalem in* a: *Dico pondus* n *motum iri ex* n *versus* d, *finitoque tempore in ipsum punctum* d *peruenturum*.

DVctâ enim perpendiculari *n x*, intelligatur ad easdem partes constituta talis curua; ad quam demissis ex duobus quibusuis punctis ipsius *n d* rectis *a g*, *k s* perpendicularibus ipsi *n d*, ita sit *a g* ad *k s*, vt impetus singularis acquisitus in *a* ad singularem impetum acquisitum in *k*. Constat, quòd figura *x n d g s x* repræsentabit impetus ponderis *n* in motu per *n d*; seu singulares acquisitos in singulis æqualibus infinitesimis partibus ipsius *n d*, seu totales aggregatos ex omnibus simul præcedentibus. Cùm enim ita sit ordinatim applicata *a g* ad ordinatim applicatam *k s*, vt singularis impetus acquisitus in *a* ad singularem impetum acquisitum in *k*, vbiuis designata fuerint ipsa puncta *a*, & *k* in rectâ *n d*; consequens etiam est, vt aggregatum omnium ordinatim applicatarum ab eâ curuâ ad axem *n d*, nimirum integra figura *x n d g s x*, eam habeat rationem ad respectiuas portiones *x n a g s x*, *x n k s x*, quæ est impetus totalis aggregati in *d*, ad impetus totales aggregatos in *a*, & in *k*. Et quoniam ratio impetus acquisiti in *a* ad impetum acquisitum in *k* componitur ex ratione directâ distantiæ *a d* ad distantiam *k d*, & ex reciprocâ impetus totalis in *k* ad impetum totalem in *a*, hoc est portionis *x n k s x* ad portionem *x n a g s x*; ex eisdem etiam rationibus componetur ipsa *a g* ad *k s*. Patet etiam, quòd ea curua ex vnâ parte incidet in punctum *d*, cùm nulla ibi fiat acquisitio impetus; ex alterâ verò semper quidem accedet, sed nunquam tamen occurret ipsi *n x*, in infinitum protractæ.

Concipiatur etiam talis alia curua constituta, ad quam protractis in *e*, & *m* ipsis *g a*, *s k*, ita sit *a e* ad *k m*, vt reciprocè portio *x n k s x* ad portionem *x n a g s x*. Constat primò, quòd ea non incidit in punctum *d*. Si enim excitetur ad *n d* perpendicularis *d f*, quæ ita sit ad *a e*, vt reciprocè portio *x n a g s x* ad integram figuram *x n d g s x*, pertinebit vtique punctum *f*

ad eiusmodi curuam. Constat secundò, quòd ea repræsentabit tempora ponderis *n* in motu per *n d*. Nam, vbinis designata fuerint ipsa puncta *a*, & *k* in rectâ *n d*, ita est ordinatim applicata *a e* ad ordinatim applicatam *k m*, vt reciprocè portio *x n k s x* ad portionem *x n a g s x*, siue vt impetus totalis in *k* ad impetum totalem in *a*: vt autem impetus (a) totalis in *k* ad



impetum totalem in *a*, ita reciprocè mora infinitesima temporis in *a* ad moram infinitesimam temporis in *k*: igitur ita est ordinatim applicata *a e* ad ordinatim applicatam *k m*, vt directè mora infinitesima temporis in *a* ad moram infinitesimam temporis in *k*. Vnde etiam consequitur, vt aggregatum omnium ordinatim applicatarum ab istâ curuâ ad axem *n d*, nimirum integra figura *y n d f e m y* eam habeat rationem ad respectiuas portiones *y n a e m y*, *y n k m y*, quæ est temporis totalis ex *n* in *d* ad tempora totalia ex *n* in *a*, & ex *n* in *k*. Quare (per conuersionem rationis, & diuidendo) ita erit tempus (v. g.) ex *n* in *a* ad tempus ex *a* in *d*, vt portio *y n a e y* ad portionem *e a d f*.

Iam verò ostendere oportet, finitam esse rationem portionis *y n a e y* ad portionem *e a d f*. Breuitatis enim gratiâ ponatur *a e* æqualis ipsi *a g*. Quoniam ratio *k s* ad *a g* componitur ex ratione directâ distantiæ k *d* ad distantiam *a d*, & ex reciprocâ impetus tota-

(a) *praenot. 6. huius, & 4. nostri primi.*

totalis in *a* ad impetum totalem in *k*, hoc est moræ infinitesimæ in *k* ad moram infinitesimam in *a*, nimirum ipsius *km* ad *ae*; estque *kd* maior quàm *ad*: consequens vtique est, vt ratio *km* ad *ae* minor sit ratione *ks* ad *ag*, siue *ae* ipsi æqualem. Igitur *km* minor est quàm *ks*. Atque ita, vbiuis designatum fuerit punctum *k* inter puncta *n*, & *a*. Quare figura *ynaey* minor erit ipsâ *xnagx*. Porrò autem, cùm ratio integræ figuræ *xnadx* ad portionem *xnagx* ostensa sit æqualis rationi directæ impetus totalis in *d* ad impetum totalem in *a*, hoc est moræ (a) infinitesimæ in *a* ad moram infinitesimam in *d*, nimirum ipsius *ae* ad *df*; erit etiam (per conuersionem rationis, & diuidendo) ita portio *xnagx* ad portionem *gad*, vt *df* ad excessum, quo *ae* superat ipsam *df*. Quare, si ratio istiusmodi sit finita: finita etiam erit ratio portionis *xnagx* ad portionem *gad*. Itaque multò magis finita erit ratio figuræ *xnagx* ad figuram *eadf*, quæ facilè, ex prædictis, ostenditur maior ipsâ *gad*: atque adeò rursum multò magis finita erit ratio alterius figuræ *ynaey* (quæ vtique ostensa est minor ipsâ *xnagx*) ad eandem figuram *eadf*.

Sin verò infinita ponatur ratio ipsius *df* ad excessum, quo *ae* superet ipsam *df*: hoc est, si excessus prædictus sit infinitè paruus; iam integra figura *yndfy* non differet à parallelogrammo (nam punctum *a* sumitur pro quolibet puncto inter puncta *n*, & *d*) atque adeò ita erit figura *ynaey* ad figuram *eadf* vt *na* ad *ad*. Igitur, seu finita ponatur, seu infinita ratio prædicta, adhuc tamen finitam esse oportet rationem figuræ *ynaey* ad figuram *eadf*.

Quare, cùm ostensum iam sit, ita esse tempus ex *n* in *a* ad tempus ex *a* in *d*, vt portio *ynaey* ad portionem *eadf*; finita pariter erit ratio temporis ex *n* in *a* ad tempus ex *a* in *d*. Manifestum est autem, finitum esse tempus ex *a* in *d*: igitur finitum est etiam tempus ex *n* in *a*, atque adeò ipsum etiam integrum tempus ex *n* in *d*. Quod vtique erat demonstrandum.

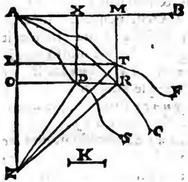
PRO-

(a) *pranot. 6. huius, & 4. nostri primi.*

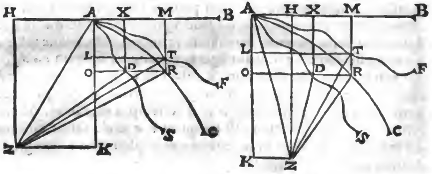
PROPOSITIO DVODECIMA.

Singulares impetus, quos grauia in æqualibus partibus infinitesimis temporis concipiunt versùs centrum commune, proportionantur ipsis distantijs.

Resumptis enim figuris corollarij post nonam huius, recolatur ea propositio. Porrò ostensum est in dicto corollario, quòd impetus conceptus à graui *a* in *r* versùs centrum commune



z, ita est ad alterutrum impetum conceptum ab eodem graui, vel in *t*, vel in *d*, versùs idem centrum *z*, vt distantia *r z* ad alterutram distantiam, vel *t z*, vel *d z*. Sit autem primò impetus conceptus à graui *a* in *r* versùs centrum commune *z*, ad impetum conceptum ab eodem graui in *d* versùs idem centrum *z*, vt distantia *r z* ad distantiam *d z*. Sed hîc recolere oportet ex superioribus, quòd im-



petus totalis in *r* secundùm *m r* parallelam ipsi *a z*, tum est æqualis impetui totali in *d* secundùm *x d* parallelam eidem *a z*, & æqualem ipsi *m r*; tum vterque horum impetuum totalium ag-

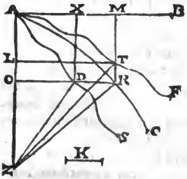
grega-

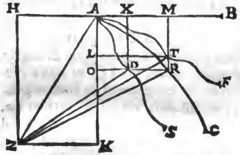
gregatus intelligitur ex omnibus simul impetibus, qui successiuè subnasci intelliguntur secundùm parallelas prædictæ *a z* ex impetibus primigenijs successiuè conceptis à graui *a* versùs centrum commune *z*. Et quoniam verum id est, vbiuis designata fuerint puncta correspondentia *r*, & *d*; dici propterea oportet, quòd impetus subnascens secundùm *m r* in parte infinitesimâ *r* æqualis sit impetui (a) subnascenti secundùm *x d* in æquali parte infinitesimâ *d*: vnde vtique fit, quòd impetus primigenius singularis conceptus à graui *a* versùs centrum commune *z* in eâ parte infinitesimâ temporis, quâ ipsum morari intelligimus in parte spatij infinitesimâ *r* sumptâ secundum *m r*, ita se habeat ad impetum primigenium singularem conceptum ab eodem graui versùs idem centrum *z* in eâ parte infinitesimâ temporis, quâ ipsum morari intelligimus in æquali parte spatij infinitesimâ *d* sumptâ secundùm *x d*, vt distantia *r z* ad distantiam *d z*. Igitur, cùm mora infinitesima temporis in eâ parte spatij infinitesimâ *r* æqualis sit moræ infinitesimæ temporis in alterâ (b) æquali parte spatij infinitesimâ *d* (nimirum propter æqualitatem impetuum totalium, quos inibi obtinet graue *a* secundùm prædictas directiones) manifestum enimverò fit, quòd ipsum graue *a* in æqualibus partibus infinitesimis temporis concipit ab illo duplici loco versùs centrum commune *z* impetus proportionatos ipsis distantijs *r z*, *d z*. Sit rursum secundò impetus conceptus à graui *a* in *r* versùs centrum commune *z*, ad impetum conceptum ab eodem graui in *t* versùs idem centrum *z*, vt distantia *r z* ad distantiam *t z*. Porrò autem recolere hîc etiam oportet ex superioribus, quòd impetus viuus grauis *a* in *r* secundùm *o r* parallelam ipsi *a b*, tum est æqualis impetui viuo in *t* secundùm *l t* parallelam eidem *a b*, & æqualem ipsi *o r*; tum vterque horum impetuum viuorum æqualis est illi, qui de primo impetu secundùm *a b* superesse concipitur post elisionem omnium impetuum, qui successiuè subnasci intelliguntur secundùm ipsas *r o*, *t l* ex impetibus primigenijs succesſiuè conceptis à graui *a* versùs centrum commune *z*.

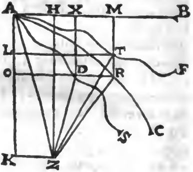
Et

(a) *pranot. 2.* (b) *pranot 6. huius, & 4. nostri primi.*

Et quoniam verum id est, vbiuis designata fuerint puncta correspondentia r, & t; dici propterea oportet, quòd impetus subnascens secundùm ro in parte infinitesimâ r æqualis sit impetui (a) subnascenti secundùm tl in æquali parte infinitesimâ t: vnde vtique fit, quòd impetus primigenius conceptus à graui a versùs centrum commune z in eâ parte infinitesimâ temporis, qua ipsum morari intelligimus in parte spatij infinitesimâ r sumptâ secundùm or, ita se habeat ad impetum primigenium conceptum ab eodem graui versùs idem centrum z in eâ parte infinitesimâ temporis, quâ ipsum morari intelligimus in æquali parte spatij infinitesimâ t sumptâ secundùm lt, vt distantia rz ad distantiam tz. Igitur, cùm mora infinitesima temporis in eâ parte spatij infinitesimâ r æqualis sit moræ infinitesimæ temporis in alterâ







(b) æquali parte spatij infinitesimâ t (nimirum propter æqualitatem impetuum viuorum, quos inibi obtinet graue a secundùm prædictas directiones) manifestum enim verò fit; quòd ipsum graue a in æqualibus partibus infinitesimis temporis concipit ab illo duplici loco versùs centrum commune z impetus proportionâ-

(a) *pranot.* 2. (b) *pranot.* 6. *huius*, & 4. *nostri primi*.

natos ipsis distantijs *r z*, *t z*.

Quoniam igitur punctum *t* est quodlibet punctum ipsius *m r* vtrinque in infinitum protractæ; atq; item punctum *d* est quodlibet punctum ipsius *o r* vtrinque pariter in infinitum protractæ, vt facilè colligi potest ex quintâ, & septimâ huius; ostensumque iam est, quòd impetus conceptus à graui *a* in *r* versùs centrum commune *z* in quadam parte infinitesimâ temporis, ita se habet ad alterutrum impetum conceptum versùs idem centrum *z* vel in *t*, vel in *d*, in æquali parte infinitesimâ temporis, vt distantia *r z* ad alterutram distantiam vel *t z*, vel *d z*: dicendum porrò est vniuersim, quòd singulares impetus, quos in descensu grauia acquirunt versùs centrum commune in æqualibus partibus infinitesimis temporis, proportionantur ipsis distantijs. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

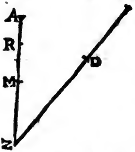
POstremæ huius consequentiæ vim ex eo manifestè intellige, quòd, etiam datis positione puncto *r* & centro communi *z*, ipsa *r m* (idem valet de *r o*) est quælibet recta, in quamlibet partem ab ipso puncto *r* initium ducens. Hoc autem satis innotescet consideranti, quòd rectæ *a z*, *a b* designari possunt ad libitum. Rursum verò, si fortè dubites ne præcedens propositio restringenda sit ad eum casum, in quo non solùm moræ infinitesimæ temporis, sed ipsæ etiam particulæ infinitesimæ spatij æquales sint, ab hâc te suspicione liberabit sequens theorema.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

RAtio singularium impetuum, quos grauia concipiunt versùs centrum commune in duabus quibuslibet infinitesimis partibus spatij, componitur ex rationibus directis distantiarum à centro communi, & morarum infinitesimarum temporis in ipsis propositis infinitesimis partibus spatij.

P Intelli-

INtelligatur graue *a* descendere per *az* versùs centrum commune *z*: In ipsâ autem *az* designentur duæ quælibet infinitesimæ partes spatij, vna *r*, altera *m*. Dico rationem impetus singularis concepti à graui *a* in parte infinitesimâ *r* ad impetum singularem conceptum in parte infinitesimâ *m*, componi ex rationibus directis distantiæ *rz* ad distantiam *mz*, & moræ infinitesimæ temporis in *r* ad moram infinitesimam temporis in *m*. Assumptâ enim distantiâ *dx* æquali ipsi *rz*, designatâque infinitesimâ *d* æquali propositæ infinitesimæ *m*, consideretur impetus singularis deorsum conceptus in *d* à quodam graui *d* in tantâ morâ temporis, quanta est mora infinitesima ipsius grauis *a* in *m*. Quæ quidem æqualitas moræ continget, si impetus totalis grauis *d* in *d* secundùm *dz* æqualis ponatur impetui (a) totali grauis *a* in *m* secundùm *mz*. Porrò autem ratio impetus concepti à graui *a* in *r* ad impetum conceptum in qualibet alterâ infinitesimâ *m*, componitur ex ratione impetus concepti à graui *a* in *r* ad impetum conceptum à graui *d* in *d*, & ex ratione impetus concepti à graui *d* in *d* ad impetum conceptum in ipsâ propositâ infinitesimâ *m*. At prior harum rationum æqualis est rationi (b) moræ infinitesimæ temporis in *r* ad moram infinitesimam temporis in *d*, seu moram infinitesimam temporis in *m*. Posterior autem æquatur (per præcedentem) rationi distantiæ *dz*, seu *rz* ad *mz*. Igitur ratio impetus concepti à graui *a* in quadam parte spatij infinitesimâ *r* ad impetum conceptum in qualibet alterâ parte spatij infinitesimâ *m*, componitur ex rationibus directis distantiæ *rz* ad distantiam *mz*, & moræ infinitesimæ temporis in *r* ad moram infinitesimam temporis in *m*. Quod erat &c.



SCHO-

(a) *prænot. 6. huius, & 4. nostri primi.* (b) *schol. seq.*

SCHOLIVM.

Assumimus hîc tanquam certum, quòd, stante æquali distantiâ à centro communi z, impetus singulares concepti à grauibus in duabus quibusuis, etiam inæqualibus, infinitesimis spatij partibus r, & d proportionentur moris infinitesimis temporis. Nam ex vnâ parte dubitari nequit, quin, præcisâ consideratione temporis, æquales sint impetus singulares à grauibus concepti ab æquali distantiâ à centro communi: ex alterâ verò negari nequit, quin attendendus sit temporis fluxus ad multiplicandum ipsum impetum deorsum, quatenus nimirum iugiter à grauibus nouus & nouus deorsum impetus successiuè concipitur. Hinc autem manifestè consequitur intentum præsens. Neque te mouere debet, quòd in ipso motu per infinitesimas r, & d non semper inuariata maneat æqualis distantia rz, & dz, si nempe impetus totalis in d secundùm dz ponatur maior impetu totali in r secundùm rz: non, inquam, mouere te debet; tum quia, si præter tempus attendere etiam velis distantiam à centro communi, illud ipsum est, in quod nos incumbimus; tum quia rursum defectus istiusmodi ab æqualitate est infinitè paruus, atque adeò aptus inducere errorem duntaxat infinitè paruum, vt in simili monuimus in prænotando quinto. Super hâc tamen re plura selectiora leges initio libri quarti.

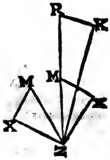
COROLLARIVM I.

Hinc, si partes spatij infinitesimæ r, & m æquales inter se fuerint, ratio impetus singularis concepti à graui a in r versùs centrum commune z, ad impetum singularem conceptum in m versùs idem centrum z, componetur ex ratione directâ distantiæ rz ad distantiam mz, & ex reciprocâ impetus totalis in m ad impetum totalem in r; siquidem posterior hæc ratio æqualis erit rationi (a) directæ moræ infinitesimæ temporis in r ad moram infinitesimam temporis in m.

(a) *prænot. 6. huius, & 4. nostri primi.*

COROLLARIVM II.

HInc rursum ratio singularium impetuum subnascentium in duabus quibusuis infinitesimis spatij partibus *r*, & *m*, versùs duo quælibet centra particularia *k*, & *x*, componitur & ipsa ex rationibus directis distantiæ *rk* ad distantiam *mx*, & moræ infinitesimæ temporis in *r* ad moram infinitesimam temporis in *m*, sumptis vtique partibus *r*, & *m* secundùm ipsas directiones *rk*, *mx*. Nam ratio impetus singularis subnascentis in *r* versùs centrum particulare *k*, ad impetum singularem primigenium conceptum ibi in *r* versùs centrum commune *z*, in æquali ipsâ infinitesimâ temporis parte, æquatur (a) rationi distantiæ *rk* ad distantiam *rz*. Ratio autem impetus primigenij concepti in *r* versùs centrum commune *z*, ad impetum primigenium conceptum in *m* versùs idem centrum *z*, componitur (per præcedentem) ex rationibus distantiæ *rz* ad distantiam *mz*, & moræ infinitesimæ temporis in *r* ad moram infinitesimam temporis in *m*. Ac tandem ratio impetus primigenij concepti in *m* versùs centrum commune *z*, ad impetum singularem subnascentem in *m* versùs (b) centrum particulare *x* in æquali ipsâ infinitesimâ temporis parte, æquatur rationi distantiæ *mz* ad distantiam *mx*. Igitur ratio impetus singularis subnascentis in *r* versùs centrum particulare k, ad impetum singularem subnascentem in *m* versùs centrum particulare *x*, componitur ex prædictis quatuor rationibus. Porrò autem tres rationes *r*k ad *rz*, *rz* ad *mz*, & *mz* ad *mx*, æquantur rationi *rk* ad *mx*. Itaque ratio prædictorum subnascentium singularium impetuum componitur ex rationibus directis distantiæ *r*k ad distantiam *mx*, & moræ infinitesimæ temporis in *r* ad moram infinitesimam temporis in *m*. Quod erat demonstrandum.



CO-

(a) 24. *nostri primi*. (b) 24. *nostri primi*.

COROLLARIVM III.

QVare, si moræ infinitesimæ temporis æquales inter se fuerint; ratio prædictorum, seu primigeniorum, seu subnascentium impetuum æquabitur soli rationi directæ distantiæ *rk* ad distantiam *mx*. Vicissim autem, si distantię *r*k, *mx* ęquales inter se fuerint, prædicta ratio æquabitur soli rationi directæ morarum temporis.

COROLLARIVM IV.

PRæterea, si partes spatij infinitesimæ *r*, & *m*, sumptæ vtique secundùm directiones *rk*, *mx*, æquales inter se fuerint; ratio prædicta componetur ex ratione directâ distantiæ *rk* ad distantiam *mx*, & ex reciprocâ impetus totalis in *m* versùs centrum particulare *x*, ad impetum totalem in *r* versùs centrum particulare *k*. Constat ex dictis in primo corollario.

COROLLARIVM V.

COlligitur tandem easdem proportiones valere, si fiat comparatio alicuius singularis impetus subnascentis versùs quoddam centrum particulare, cum altero impetu primigenio vbilibet concepto versùs centrum commune. Id autem facilè eruitur ex præmissis.

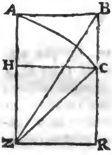
PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

EXistente z *centro communi grauium, & angulo* b a z *recto, graue quodpiam* a *proiectum intelligatur secundùm* a b: *describet sanè, dum libera sit via, curuam quandam; in quâ assumpto quolibet puncto* c, *demittatur ad* a b *perpendicularis*

c b,

cb, *atque item ad* az *perpendicularis* ch. *Dico, quòd graue* a, *æquali ipso tempore descriptionis curuæ* ac, *tum perfecisset ipsam* ab, *si planum* ab *eius descensui restitisset, tum etiam perfecisset ipsam* ah, *ex vi solius naturalis agglomerati impetus versùs centrum commune* z.

IVngantur enim *cz*, *bz*. Constat æquales inter se esse *ba*, *cb*. Quare impetus subnascens in *c* secundùm *cb*, ita erit ad impetum (a) subnascentem in *b* secundùm *ba*, vt mora temporis in *c* ad moram temporis in *b*. Igitur impetus proiectionis secundùm *ab*, aut *bc* parallelam, & æqualem ipsi *ab*, patitur inibi detrimenta proportionata moris temporis in ipsis correspondentibus infinitesimis spatij. Verum autem id est, vbiuis sumptę fuerint infinitesimę correspondentes *c*, & *b*. Est etiam pro vtrâque hypothesi æqualis impetus ab initio motus. Igitur graue *a* æquali semper respectiuè impetu (b) procedit per planum *ab*, siue hoc immotum intelligatur in suo situ, seu concipiatur descendere sibi ipsi parallelum secundùm *az*, describente puncto *a* ipsam *az*. Quare graue *a*, æquali ipso tempore (c) descriptionis curuæ *ac*, perfecisset ipsam *ab*, æqualem nempe, & parallelam ipsi *bc*. Quod erat priore loco demonstrandum.



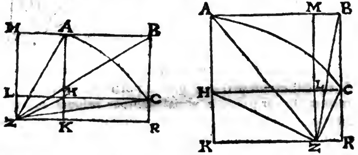
Porrò autem, completo rectangulo *zbcr*, æquales inter se erunt *bz*, *cr*. Quare impetus subnascens in *c* versùs centrum particulare *r* ita erit ad impetum primigenium (d) conceptum in *b* versùs centrum commune *z*, vt mora temporis in *c* ad moram in *b*. Igitur impetus naturalis secundùm *ab*, aut *bc* parallelam, & æqualem ipsi *ab*, acquirit inibi incrementa proportionata moris temporis in ipsis correspondentibus infinitesimis spatij. Verum autem id est, vbiuis designatæ fuerint infinitesimæ correspondentes *c*, & *b*. Est etiam pro vtrâque hypothesi æqualis impe-

(a) *cor.* 3. *præc.* (b) *pranot.* 3. (c) *pranot.* 4. (d) *cor.* 3. & 5. *præc.*

petus ab initio motus. Igitur graue *a* æquali semper respectiuè impetu (a) descendit per planum *a z*, siue hoc intelligatur immotum in suo situ, seu concipiatur procedere sibi ipsi parallelum secundùm *a b*, describente puncto *a* ipsam *a b*. Quare graue *a*, æquali ipso tempore descriptionis (b) curuæ *a c*, perfecisset ipsam *a b*, æqualem nempe, & parallelam ipsi *b c*, ex vi solius naturalis agglomerati impetus versùs centrum commune *z*. Quod erat posteriore loco demonstrandum.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

Sin autem, cæteris alijs manentibus, obtusus fuerit, vel acutus angulus baz: *assumpto itidem in curuâ descriptâ quolibet puncto* c, *ducatur ad* ab *perpendicularis* cb, *compleaturque re-*

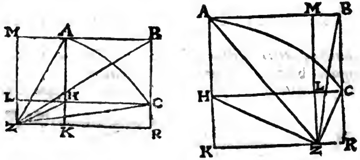


ctangulum cbah. *Dico rursum, quòd graue* a, *æquali ipso tempore descriptionis curuæ* ac, *tum perfecisset ipsam* ab, *si planum* ab *eius descensui restitisset, tum etiam perfecisset ipsam* ah, *ex vi solius naturalis agglomerati impetus per planum* ah *perpendiculare ipsi* ab.

Dvcatur enim ad *a b*, si opus fuerit, protractam, perpendicularis *z m* occurrens ipsi *b c* protractæ, si opus fuerit, in *l*. Tum compleantur rectangula *z m b r*, *z m a k*, iunganturque *z b*,

(a) *pranot.* 3. (b) *pranot.* 4.

zh, *zc*, *zb*. Conſtat æquales inter ſe fore *bm*, *cl*. Quare impetus ſubnaſcens in *b* versùs centrum particulare *m*, ita erit ad impetum (a) ſubnaſcentem in *c* versùs centrum particulare *l*, vt mora infiniteſima in *b* ad moram infiniteſimam in *c*. Igitur impetus proiectionis ſecundùm *ab*, aut *bc* parallelam, & æqualem ipſi *ab*, patitur inibi detrimenta, aut incrementa acquirit (prout nempe locata fuerint ipſa puncta *m*, & *l*) proportionata moris temporis in ipſis correſpondentibus infiniteſimis ſpatij. Verum



autem id eſt, vbiuis deſignatæ fuerint infiniteſimæ correſpondentes *b*, & *c*. Eſt etiam pro vtrâque hypotheſi æqualis impetus ab initio motus. Igitur graue *a* æquali ſemper reſpectiuè impetu (b) procedit per planum *ab*, ſiue hoc immotum intelligatur in ſuo ſitu, ſeu concipiatur deſcendere ſibi ipſi parallelum ſecundùm *ab*, deſcribente puncto *a* rectam *ab*. Quare graue *a*, æquali ipſo tempore (c) deſcriptionis curuæ *ac*, perfeciſſet ipſam *ab*, æqualem nempe, & parallelam ipſi *bc*. Quod erat priore loco demonſtrandum.

Rurſum conſtat æquales inter ſe fore *cr*, *bk*. Quare impetus ſubnaſcens in *c* versùs centrum particulare *r*, ita erit ad impetum (d) ſubnaſcentem in *b* versùs centrum particulare *k*, vt mora temporis in *c* ad moram in *b*. Igitur impetus naturalis ſecundùm *ab*, aut *bc* parallelam, & æqualem ipſi *ab*, acquirit inibi

(a) *cor. 3. poſt 13. huius*. (b) *pranot. 3.* (c) *pranot. 4.*
(d) *cor. 3. poſt 13. huius*.

inibi incrementa proportionata moris temporis in ipsis correspondentibus infinitesimis spatij. Verum autem id est, vbiuis designatæ fuerint infinitesimæ correspondentes *c*, & *b*. Est etiam pro vtrâque hypothesi æqualis impetus ab initio motus. Igitur graue *a* æquali semper respectiuè impetu (a) descendit per planum *ab*, siue hoc intelligatur immotum in suo situ, seu concipiatur procedere sibi ipsi parallelum secundùm *ab*, describente puncto *a* ipsam *ab*. Quare graue *a*, æquali ipso tempore descriptionis (b) curuæ *ac*, perfecisset ipsam *ab*, æqualem nempe, & parallelam ipsi *bc*, ex vi solius naturalis agglomerati impetus per planum *ab*, perpendiculare ipsi *ab*. Quod erat posteriore loco demonstrandum.

COROLLARIVM.

HInc habes, quâ ratione (consule etiam figuram prop. 14. præc.) determinari possint omnia puncta curuæ, à proiectis descriptæ. Si enim constet, quòd graue *a* proiectum secundùm *ab* perueniret ex *a* in *b* (dum planum *ab* eius descensui resisteret) æquali ipso tempore, quo descenderet ex quiete ab *a* in *b*, ex vi solius naturalis agglomerati impetus deorsum; siue intelligatur descensus fieri per *az*, quæ perpendicularis sit ad *ab*; seu statuatur fieri per quandam *ak* perpendiculariter excitatam ad prædictam *ab*: si, inquam, alicunde id constet, compleaturque rectangulum *babc*; patet sanè punctum *c* pertinere ad curuam ab ipso graui *a* descriptam. Atque ita similiter de alijs punctis.

Q NEO-

(a) *pranot.* 3. (b) *pranot.* 4.

NEO-STATICÆ LIBER QUARTUS.

SYNOPSIS.

IMpetus totales, in descensu ex quiete à graui acquisitos, proportionales demonstramus ordinatim applicatis in quadrante circuli, cuius radius sit recta iungens centrum grauium cum puncto illo spatij, vnde ex quiete cœpit graue descendere: Tempora verò proportionalia esse arcubus, inter ordinatas & verticem interceptis. Rursum omnia grauia ex quacunque distantiâ æquali tempore ad centrum ex quiete peruenire. Præterea ostendimus, circumferentiam circuli, aut ellypseos, pro diuersitate impetus ab extrinseco impressi, per æternas reuolutiones à proiectis describi. His accedit comparatio hypothesis nostræ cum communi Galilæanâ, quoad impetus totales, ac tempora. Postremò, datâ tangente (præterquam ad verticem) illius figuræ curuæ, cuius ordinatæ repræsentant tempora totalia, in descensu grauium ex quiete iuxta nostram hypothesim; sicut etiam, datâ in lineis rectis ratione temporis iuxta nostram hypothesim ad tempus iuxta hypothesim Galilæanam; ostendimus quadraturam circuli.

IN-

INTRODVCTIO.

AMabit fortasse Lector occasionem nostrarum super hoc toto argumento contemplationum penitiùs intelligere. Ecce autem paucis rem exequor. Pater Thomas Ceua typis ediderat libellum suum de naturâ grauium; in quo duo præcipuè intendit: vnum est, quòd impetus grauium ex quiete versùs centrum proportionentur distantijs ab ipso centro: alterum, facili ratiocinio inde fluens, quòd omnia grauia (suppositâ nempe simili motus acceleratione) æquali tempore ex quacunque distantiâ ad centrum perueniant. Consultus ab eo fui, quale super istis iudicium ferrem. Respondi, videri ea mihi feliciter demonstrata, nec aliàs posse in controuersiam adduci, nisi ad examen pariter vocaretur libra Archimedea cum alijs bene multis theorematis, quæ Galilæus, & alij post ipsum de momentis grauium tradiderant. Itaque iniunxit mihi, pro suâ erga me beneuolentiâ, vt, quoniam aliquibus non aliter admittenda videbatur libra Archimedea, præterquàm infinitè dissita à centro, conarer illam, si possem, è tantâ distantiâ ad nos vsque deducere. Parui libens amico optimo: sed rem acri animo aggressus, statim enim verò perspexi, altioribus hâc de re decernendum esse principijs, quàm initio cogitaueram. Scilicet, non ex librâ Archimedeâ prætensam impetuum ex quiete proportionem, sed magis ex eâ proportione aliunde stabilitâ libram ipsam Archimedeam demonstrandam cognoui. Rursum verò, ex impetibus successiuè in descensu à graui conceptis, gradus mihi faciendus fuit ad primum impetum ex quiete conceptum. Ægrè id initio tulit P. Ceua, cui plurimùm arridebat decantata ab integro sæculo post Galilæum vniformis acceleratio motus, quam vtique nouo isto processu deletum iri peruidebat. Ego tamen aiebam, persuasum nunquam mihi fore, quòd graue descendens æqualia æqualibus temporibus incrementa virium acquirat, nullâ habitâ ratione distantiarum à centro, dum aliàs ratio eiusmodi habenda foret in conceptione primi impetus

ex quiete. Addebam etiam fieri nullatenus posse, quin ratio aliqua distantiarum in descensu haberetur, ne, contra naturam centri, versùs quod impetus omnis naturalis concipitur, admittere cogeremur impetum aliquem ex ipso centro conceptum. Quare pro ipso descensu regula aliqua successiuè concipiendorum impetuum stabilienda erat, secundùm quam à primo maiore impetu ex quiete concepto gradus fieret per minores & minores impetus, vsque ad nullum. Semel autem euicto, quòd ex minore & minore distantiâ à centro, minores & minores impetus concipiantur in descensu à graui; palàm enim verò fit, quòd etiam ex quiete (neque enim vllum interesse potest discrimen) maior quidem impetus concipiatur ex maiore distantiâ, minor verò ex minore: quod vtique, seorsùm ab illâ præuiâ consideratione, demonstrari nunquam continget. Multa ex aduerso ingeniosè, ac validè reposuit P. Ceua: mutuis epistolis diu est concertatum: neque etiam familiaribus altercationibus parcitum est. Sed ego interim concinnaui operosa libri præcedentis theoremata: quibus lectis, ac perpensis, ac rursus pulchritudine eorum, quæ sequenti libro continentur, magis adhuc deuinctus P. Ceua, æquo animo totus tandem venit in meam sententiam aduersùs communem iam receptam.

Porrò autem, designatis duabus æqualibus infinitesimis spatij, per quas duo grauia, siue ex quiete, siue non, descendere intelligantur versùs centrum; præter rationem vnam componentem, quæ apud nos est distantiarum à centro secundùm longitudinem, & apud Galilæum æqualitatis, interuenire etiam debere rationem temporis ad tempus, vt inde habeatur ratio composita impetus acquisiti in motu per vnam infinitesimam ad impetum acquisitum in motu per alteram æqualem infinitesimam; patens enim verò esse potest: quandoquidem tempus interuenire omnino debet ad multiplicandum impetum, qui secundùm priorem rationem præcisiuè à tempore concipi intelligitur: cæterùm enim graue, contra manifestam experientiam, moueri nunquam ex quiete incipiet versùs centrum. Et quidem, assumptâ ratione distantiarum à

centro,

centro, demonstratum id habes in propositione decimâ libri præcedentis. Vniuersim autem absurdum istud necessarium foret, si impetus grauis deorsum nunquam augeretur (quacunque tandem ratione augmentum eiusmodi fieret) nisi ex nouo & nouo loco per ipsum motum acquisito; quia scilicet nunquam accideret, vt graue è suâ primâ statione dimoueretur, propter insufficientiam ad motum primi seorsùm impetus ex quiete concepti. Neque tamen vacat nouâ figurâ geometricâ contemplandam exhibere consecutionem prædictam, quam puto satis perspectam fore ex methodo à nobis vsurpatâ in demonstratione pręcitatæ propositionis. Itaque in motu per eas infinitesimas multiplicari iugiter intelligitur impetus secundùm priorem quamlibet rationem stabilitus, adeò vt nempe ratio etiam temporis ad tempus interuenire debeat ad exhibendam nobis prædictam rationem compositam. Vbi facilè vides idem planè dicendum, etiam si designatæ infinitesimæ fuerint inæquales. Præcisâ enim ratione temporis ad tempus, inuariata manet altera ratio componens, siue æqualitatis iuxta Galilæum, siue iuxta nos distantiarum à centro secundùm longitudinem, siue alia quælibet excogitabilis; inuariata, inquam, cùm inæqualitas prædicta, vel nullum inducere possit discrimen, vt iuxta Galilęum, vel illud infinitè paruum, atque adeò apud geometras nullum.

Atque hinc declaratam habes, amice Lector, nostrarum meditationum occasionem, atque item abunde suppleta, quæ in libro præcedente desiderari posse cognouimus. His autem dictis duo adhuc subnectimus prænotanda; quæ quidem, vt nimis facilia, à numero sequentium theorematum secernenda iudicauimus.

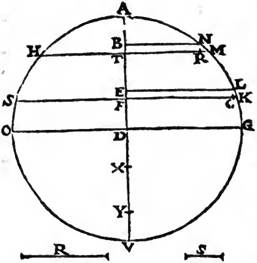
PRÆNOTANDA.

1 ADmissâ communi post Galilæum sententiâ, quæ grauibus descendentibus æqualia velocitatis incrementa æqualibus temporibus attribuit, constat sanè ita fore impetum, vno aliquo tempore acquisitum, ad impetum alio quouis tempore acquisitum, vt tempus ad tempus.

2 Si

2 Si duo grauia ex æquali diſtantiâ à centro percurrere intelligantur ex quiete duas æquales infiniteſimas ſpatij, vnum quidem iuxta hypotheſin Galilæanam, alterum verò iuxta noſtram prædictam; æqualem tamen impetum acquirent in motu per eas infiniteſimas. Nam (præcisâ multiplicatione impetuum iuxta temporis fluxum) primi ipſi impetus, ex quiete concepti, ponuntur à nobis æquales: rurſum verò, quoad multiplicationem, nullum eſt in motu per eas infiniteſimas diſcrimen inter hypotheſin Galilæanam, & noſtram; quoniam imminutio diſtantię à centro, quę ſola in noſtrâ hypotheſi varietatem aliquam poſſet inducere, eſt infinitè parua, atque adeò apud geometras nulla. Itaque conſtat aſſertum.

PROPOSITIO PRIMA.



Esto circulus, cuius centrum d, *diameter* a u. *Ordinatim applicentur à circunferentiâ ad circunferentiam, inter puncta* a, *&* d, *duæ quæuis*, h t m *minor*, s f k *maior*. *Rurſum ratio* r *ad* s *componatur ex rationibus* t d *ad* f d, *&* f k *ad* t m. *Dico ſumi poſſe in radio* a d *duo puncta* b, *&* e, *tum æquè diſtantia à punctis* t, *&* f, *tum remotiora à centro, quàm ipſa puncta* t, *&* f; *adeò ut, ordinatim applicatis* b n, e l, *ratio exceſſus ordinatæ* t m *ſupra ordinatam* b n, *ad exceſſum ordinatæ* f k *ſupra ordinatam* e l, *ſemper magis ſine vllo termino accedat ad æqualitatem cum prædictâ ratione* r *ad* s.

Su-

DEsignetur enim in *au*, versùs partes puncti *u*, portio *ex* dupla ipsius *ed*; & *by* dupla ipsius *bd*. Rursum excessus ordinatę *tm* supra ordinatam *bn* sit *mr*; & excessus ordinatę *fk* supra ordinatam *el* sit *kc*. Iam sic. Quadratum *bn* æquatur quadrato *ad*, minùs quadrato intermediæ sectionis *bd*: similiter quadratum *tm* ęquatur eidem quadrato *ad*, minùs quadrato intermediæ sectionis *td*. Igitur quadratum *bn* superatur à quadrato *tm* excessu quadrati *bd* supra quadratum *td*. Hic autem excessus æquatur quadrato *bt*, & duplo rectangulo *btd*: nimirum æquatur vni rectangulo *bty*. Pariformiter ostendemus, quòd excessus quadrati *fk* supra quadratum *el* æquatur vni rectangulo *efx*. At verò excessus quadrati *tm* supra quadratum *bn* æquatur etiam quadrato *mr*, & duplo rectangulo *mrt*; nimirum æquatur vni rectangulo *mrb*: & similiter excessus quadrati *fk* supra quadratum *el* æquatur rectangulo *kcs*. Quare ita se habet rectangulum *mrb* ad rectangulum *kcs* vt rectangulum *bty* ad rectangulum *efx*; nimirum (propter æquales *bt*, *ef*) vt recta *ty* ad rectam *fx*. Igitur ratio *ty* ad *fx* componitur ex rationibus *mr* ad *kc*, & *rb* ad *cs*: Atque adeò ratio *mr* ad *kc* componitur ex ratione (a) directâ *ty* ad *fx*, & ex reciprocâ *cs* ad *rb*. Porrò autem, si puncta *b*, & *e* proximiora semper sumantur ipsis *t*, & *f*; rationes *ty* ad *fx*, & *cs* ad *rb*, semper magis sine vllo termino accedent ad æqualitatem cum rationibus *td* ad *fd*, & *fk* ad *tm*; quoniam sic, ipsæ *td*, *fd*, & *fk*, *tm* semper magis sine vllo termino accedunt, vt sint æquales medietatibus ipsarum *ty*, *fx*, & *cs*, *rb*. Igitur, si puncta *b*, & *e* proximiora semper sumantur ipsis *t*, & *f*, ratio *mr* ad *kc*, nimirum excessus ordinatæ *tm* supra ordinatam *bn*, ad excessum ordinatæ *fk* supra ordinatam *el* semper magis sine vllo termino accedit ad æqualitatem cum ratione prædictâ *r* ad *s*, compositâ nempe ex directâ *td* ad *fd*, & reciprocâ *fk* ad *tm*. Quod erat &c.

CO-

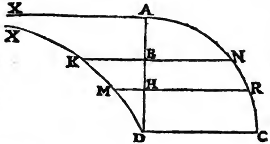
(a) 13. *nostri secundi*.

COROLLARIVM.

HInc, ordinatis in quadrante circuli *adg* duabus quibuslibet *fk*, *tm*; ratio infinitesimæ, per quam *tm* excedit proximè ordinatam remotiorem à centro, ad infinitesimam, per quam *fk* excedit proximè vniformiter ordinatam remotiorem à centro, componetur ex ratione directâ *td* ad *fd*, & reciprocâ *fk* ad *tm*. Quoniam enim ratio excessus ordinatæ *tm* supra ordinatam *bn* remotiorem à centro, ad excessum ordinatæ *fk* supra ordinatam *el* remotiorem itidem à centro, semper magis sine vllo termino accedit ad æqualitatem cum prędictâ ratione compositâ; consequens planè est, vt in eam æqualitatem veniatur, dum ipsę *bn*, *el* fuerint omnino proximę prędictis ordinatis *tm*, *fk*.

PROPOSITIO SECVNDA.

RAtio impetuum totalium, quos graue acquirit in descensu libero ex quiete versùs centrum commune, æquatur rationi directæ ordinatim applicatarum ad circumferentiam quadrantis circuli, cuius semiaxis sit recta iungens centrum ipsum commune cum illo puncto spatij, vnde ex quiete cœpit graue descendere.



ESto quadrans circuli *dac*, cuius centrum *d*. Concipiatur graue *a* descendere ex quiete per *ad* versùs ipsum centrum commune *d*: assumptisque in *ad* duabus quibusuis æqualibus infinitesimis *b*, & *b*, ordinatim applicentur *bn*, *br*. Dico impetum tota-

lem

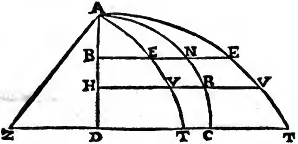
lem aggregatum in *b*, ita esse ad impetum totalem aggregatum in *b*, vt ordinatim applicata *bn* ad ordinatim applicatam *br*. Intelligatur enim constituta ad alias partes talis curua, ad quam protractis in *k*, & *m*, ipsis *nb*, *rb*, ratio *bk* ad *bm* componatur ex ratione directâ *bd* ad *bd*, & ex reciprocâ *br* ad *bn*. Erit *bk* ad *bm*, vt infinitesima, per quam *bn* excedit (a) proximè ordinatam remotiorem à centro, ad infinitesimam, per quam *br* excedit proximè vniformiter ordinatam remotiorem à centro: Atq; ita de cæteris ordinatim applicatis ad prædictam curuam. Porrò excitetur ad *ad* perpendicularis *ax* versùs partes prędictę curuę; cui vtique nunquam occurret, vtcunq; illa protrahi intelligatur. Quoniam igitur *bn* ordinatim applicata in circulo æqualis est omnibus simul infinitesimis, per quas ordinatæ omnes applicatæ in circulo inter puncta *a*, & *b*, proximior quidem centro excedit alteram sibi proximam remotiorem à centro; quemadmodum figura *xabkx* aggregata concipitur ex omnibus simul ad ipsam curuam *xk* ordinatim applicatis inter puncta *a*, & *b*: quod quidem consimiliter valet de *br* ordinatim applicatâ in circulo, ac de figurâ *xabmx*: consequitur planè ita esse figuram *xabkx* ad figuram *xabmx*, vt ordinatim applicata *bn* ad ordinatim applicatam *br*. Quarè, si graue *a* ita ex quiete descendere intelligatur per *ad*, vt in singulis æqualibus infinitesimis partibus ipsius *ad* acquirat impetus singulares proportionatos ordinatim applicatis ad prædictam curuam *xd*; ratio impetus singularis acquisiti in quadam parte spatij infinitesimâ *b*, ad impetum singularem acquisitum in alterâ qualibet æquali parte spatij infinitesimâ *b*, componetur ex ratione directâ distantiæ *bd* ad distantiam *bd*, & ex reciprocâ figuræ *xabmx* ad figuram *xabkx*; hoc est, impetus totalis aggregati in *b* ad impetum totalem aggregatum in *b*; siquidem constat eas figuras proportionatas fore prædictis impetibus totalibus, cùm ipsæ ordinatim applicatæ, ex quibus omnibus eæ figuræ aggregatæ concipiuntur, proportionatæ ponantur impetibus singularibus, successiuè à graui *a* in suo descensu acquisitis.

(a) *cor. prac.*

ſitis. Atqui ratio iſta concipiendi nouos & nouos ſucceſſiuè impetus, eadem ipſa eſt, quam oſtendimus (a) competere naturaliter grauibus. Igitur, ſi graue *a* naturaliter ex quiete deſcendere intelligatur per *ad* versùs centrum commune *d*; ratio impetus totalis aggregati in *b*, ad impetum aggregatum in qualibet alterâ æquali infiniteſimâ *b*, æquabitur rationi directæ figurarum *xabkx*, *xabmx*, hoc eſt, ipſarum *bn*, *br* ordinatim applicatarum in circulo. Quod erat &c.

COROLLARIVM I.

QVòd ſi eodem centro *d*, ac ſemiaxe *da*, fiat quadrans ellypſeos *dat*, in quâ ordinatim applicentur *be*, *hu*; conſtat vtique ita adhuc fore impetum totalem aggregatum in *b*, ad impetum totalem aggregatum in *h*, vt ordinata *be* ad ordinatam *hu*, cùm iſtæ ordinatæ in eadem ſint ratione, in quâ ipſæ *bn*, *br* ordinatæ in circulo.



COROLLARIVM II.

RVrſum conſtat eandem rationem ſubſiſtere, etiamſi quoddam alterum punctum *z* ſit centrum commune grauium, ipſum verò punctum *d* ſit centrum particulare. Nàm graue *a* in deſcenſu per *ad* acquiret nihilominus in ſingulis æqualibus infiniteſimis ſpatij partibus ſingulares impetus ſubnaſcentes, quorum ratio

(a) *cor. 1. poſt 13. noſtri tertij.*

ratio componetur ex ratione (a) directâ distantiarum à centro particulari *d*, & ex reciprocâ impetuum totalium in eisdem infinitesimis partibus aggregatorum versùs idem centrum particulare . Quare ratio impetuum totalium in duobus quibusuis punctis *b*, & *b* aggregatorum, ęquabitur consimiliter rationi directæ ipsarum *bn*, *br*, aut *be*, *bu*, nimirum ordinatarum in quadrante circuli, aut ellypseos.

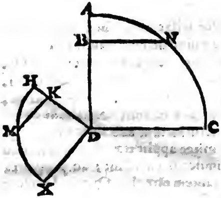
SCHOLIVM.

SEd videri possumus commisisse fallaciam, apud logicos dictam *Consequentis*. Neque enim demonstrauimus conuertentem propositionis primæ, quam tamen à nobis tacitè supponi consideranti patebit. Nihilominus (consule figuram proposit. 1. huius) in hâc re frustra immorandum non fuit: quandoquidem, sese ad perpendiculum intersecantibus duabus æqualibus rectis *ad*, *dg*, satis ex se constat determinatam esse figuram *adg*, in quâ nimirum ordinatim vniformiter applicatæ à semiaxe *ad* ad curuam *ag* eâ tali ratione se inuicem excedant; ac proptereà eam figuram necessariò esse quadrantem circuli. Quemadmodum etiam (propiùs ad rem præsentem) perspectum omnibus esse potest, determinatam esse rationem impetuum totalium (consule figuram prop. præc.) vbiuis in decursu aggregandorum, si graue *a* ita ex quiete (prout nempe naturaliter fit) descendere ponatur per *ad*, vt in duabus quibuslibet æqualibus infinitesimis spatij partibus *b*, & *b* concipiat impetus singulares, quorum ratio componatur ex ratione directâ distantiæ *bd* ad distantiam *bd*, & ex reciprocâ impetus totalis aggregati in *b* ad impetum totalem aggregatum in *b*. Quare; cùm ratio ista (demonstrata naturalis) concipiendi nouos & nouos successiuè impetus, illi alteri consonet, quę impetus totales vbiuis in decursu aggregatos proportionales statuit ordinatim applicatis in quadrante circuli, aut ellypseos, prout iam demonstrauimus; hæc enim verò posterior ratio admittenda etiam ipsa omnino venit.

(a) *cor. 4. post 13. nostri tertij.*

PROPOSITIO TERTIA.

Impetus ex quiete agglomeratus ex a *in centrum* d *ita se habet ad impetum ex quiete agglomeratum ex quouis altero puncto* h *in idem, aut alterum centrum grauium, vt distantia* a d *ad distantiam* h d.



Centro enim *d* describantur quadrantes circuli *d a c*, *d h x*. Constat ex naturâ circuli, quòd duę ordinatę à duobus quibusuis punctis, similiter diuidentibus radios *a d*, *h d* (vt *b n*, *k m*) proportionales sunt ipsis radijs *a d*, *h d*. Iam verò, impetus singulares concepti in *a* & *h*, in ęquali parte infinitesimâ temporis, proportionantur (a) eisdem radijs *a d*, *h d*. Quoniam autem verum semper id est in ipso fluxu talis infinitesimæ temporis; idcircò particulæ infinitesimæ spatij *a*, & *h* in eâ quacunque æquali infinitesimâ temporis ex quiete percursæ, ita erunt inter se, (b) vt ipsi radij *a d*, *h d*, nimirum (ex prædictâ naturâ circuli,) vt ordinatim applicatæ in quadrantibus ab illis infinitesimis *a*, & *h*. Porrò; si infinitesima ordinata in quadrante *d a c* ab eâ infinitesimâ *a* repræsentare statuitur impetum ex quiete agglomeratum in motu per ipsam infinitesimam *a*; etiam ordinata *d c* repræsentabit (per præcedentem) impetum totalem aggregatum in descensu ex quiete ex *a* in *d*. Pariformiter; si infinitesima ordinata in quadrante *d h x* ab illâ infinitesimâ *h* repræsentare statuitur impetum ex quiete agglomeratum in motu per ipsam infinitesimam *h*; etiam ordinata *d x* repræsentabit (per præcedentem) impe-

(a) *cor* 3., & 5. *post* 13. *nostri tertij* (b) *lem. seq.*

impetum totalem aggregatum in descensu ex quiete ex *b* in *d*. Igitur impetus ex quiete agglomeratus ex *a* in *d* ita se habet ad impetum ex quiete agglomeratum ex *b* in *d*, vt ordinata *dc* ad ordinatam *dx*, nimirum vt distantia *ad* ad distantiam *bd*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

QVare, designatis ipsarum *ad*, *bd* duabus quibuslibet portionibus *ab*, *bk*; impetus ex quiete agglomeratus ex *a* in *b* ita erit ad impetum ex quiete agglomeratum ex *b* in *k*, vt ordinata *bn* ad ordinatam *km*. Nam impetus ex quiete agglomeratus ex *a* in *b* ita est ad impetum ex quiete (a) agglomeratum ex *a* in *d*, vt ordinata *bn* ad ordinatam *dc*, seu radium *ad*: Est etiam impetus ex quiete agglomeratus ex *a* in *d* ad impetum ex quiete agglomeratum ex *b* in *d*, vt distantia *ad* ad distantiam *bd*: Tandem ita est impetus ex quiete agglomeratus ex *b* in *d* ad impetum ex quiete (b) agglomeratum ex *b* in *k*, vt ordinata *dx*, seu radius *bd* ad ordinatam *km*. Igitur, ex æquo, ita est impetus ex quiete agglomeratus ex *a* in *b* ad impetum ex quiete agglomeratum ex *b* in *k*, vt ordinata *bn* ad ordinatam *km*.

LEMMA.

QVandoquidem in motu per infinitesimam *a*, successiuè vniformiter concipiuntur à graui impetus proportionati distantijs à centro *d*, atque adeò semper æquales, cùm habeatur tanquam nulla imminutio interueniens distantiæ ab ipso centro *d*, vtpote infinitè parua; quod idem valet in motu alterius grauis per infinitesimam *b*: consequens planè est, vt grauia, quæ eodem ipso tempore moueri ex quiete intelliguntur per ipsas infinitesimas *a*, & *b*, obtineant semper in motu impetus proportionatos distantijs *ad*, *bd*. Quare perinde se habebunt

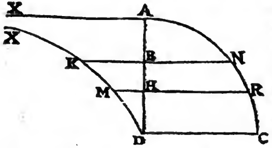
inter

(a) 2. *huius*. (b) 2. *huius*.

inter ſe, ac ſi illorum vtrunque æquabiliter ſemper ferretur. Igitur infiniteſimæ *a*, & *b* in qualibet eâdem, aut æquali infiniteſimâ temporis ex quiete percurſæ, ita erunt inter ſe, vt (a) ipſi radij *a d*, *b d*.

PROPOSITIO QVARTA.

R*Eſumptâ figurâ propoſitionis ſecundæ: ſi graue* a *deſcenderit ex quiete ab* a *in quodlibet punctum* h *ipſius* a d, *atque inde retrudi intelligatur tanto impetu viuo ſecundum* h a, *quantus erat agglomeratus ex* a *in* h *ſecundùm* a d: *dico illud graue recurſurum ipſam* h a *æqualibus vbique reſpectiuè impetibus, nimirum proportionalibus ordinatim applicatis in ipſo quadrante circuli* d a c.



SI enim illud graue ita aſcendere intelligatur ab *b* in *a*, vt ſemper obtineat impetus viuos ſecundùm *b a* proportionatos ordinatim applicatis in eo quadrante circuli; patet ſanè, quòd in ſingulis æqualibus infiniteſimis ipſius *b a* deperdet impetus proportionatos infiniteſimis, per quas, ipſæ vniformiter ordinatæ in circulo ſe inuicem excedunt, nimirum, (ex demonſtratis in ſecundâ huius) proportionatos ordinatim applicatis ad eam curuam *x d*, atque adeò (deſignatis infiniteſimis æqualibus *b*, & *b*) dicentes inter ſe rationem compoſitam ex ratione directâ diſtantiæ *b d* ad diſtantiam *b d*, & ex reciprocâ figuræ *x a b m x* ad figuram *x a b k x*, hoc eſt, impetus totalis viui in *b* ad impetum totalem viuum in *b*. Atqui ratio iſta deperdendi impetum ſurſum eadem ipſa eſt, quæ naturaliter competet prædicto graui proiecto ſurſum

(a) 3. *noſtri primi.*

sum ab *b* versùs *a*; quandoquidem in singulis æqualibus infinitesimis ipsius *ba* concipiet impetus singulares oppositos versùs centrum *d*, dicentes vtique (a) inter se prædictam rationem compositam. Igitur verè graue illud recurret ipsam *ba* æqualibus vbique respectiuè impetibus, nimirum proportionalibus ordinatim applicatis in ipso quadrante circuli *dac*. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

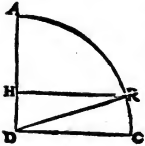
HIc etiam locus esse potest simili obseruationi factæ in scholio post secundam huius, ad quod lectorem remitto.

COROLLARIVM I.

COnstat autem idem valere, si loco puncti cuiusdam intermedij *b* assumatur ipsum centrum *d*. Rursum constat, quòd in uertice *a* elisus intelligetur totus impetus sursum.

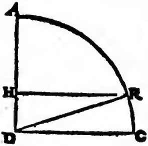
COROLLARIVM II.

COnstat etiam, quòd graue proiectum ab *b* secundùm quandam directionem *ba*, ad eam vsque altitudinem ascendet, vnde si ex quiete descenderet ad ipsum vsque punctum *b*, æqualem ibi obtineret agglomeratum impetum secundùm oppositam directionem *ab*. Sic autem eam altitudinem determinabis. In rectâ *ab* protractâ centrum aliquod grauium sit *d*. Rursum impetus positus in *b* secundùm *ba* ita sit ad impetum ex quiete acquirendum ab *b* in *d*, vt quædam *br*, perpendicularis ipsi *bd*, ad eam distantiam *bd*. Iam, centro *d* & interuallo *dr*, quadrans circuli fiat *dac*. Dico graue illud peruenturum vsque ad



(a) *cor. 1. post 13. nostri tertij.*

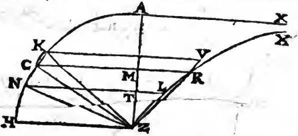
ad verticem *a*. Nam impetus ex quiete acquirendus ab *a* in *b* ita est ad impetum ex quiete (a) acquirendum ab *a* in *d*, vt *br* ad *dc*: impetus autem ex quiete acquirendus ab *a* in *d*, ita est ad impetum ex quiete acquirendum (b) ab *b* in *d*, vt *ad*, siue *dc*, ad *bd*. Igitur, ex æquo, impetus ex quiete acquirendus ab *a* in *b*, ita est ad impetum ex quiete acquirendum ab *b* in *d*, vt *br* ad *bd*. Itaque impetus ex quiete acquirendus ab *a* in *b* æqualis est illi, qui positus fuit in *b* secundùm directionem *ba*. Quare, per præcedentem, perueniet graue ab *b* vsque ad verticem *a*. Quòd si punctum *b* idem ipsum sit aliquod centrum grauium, satis vtique patet intentum ex prædictis. Quare constat propositum.



PROPOSITIO QVINTA.

Figura reciproca quadrantis circuli est dupla eiusdem.

Esto quadrans circularis *zba*, cuius centrum *z*. Intelligatur etiam constituta talis curua *zx*; ad quam si à duobus quibusuis punctis *c*, & *n* arcus circularis *ab* ordinatim applicentur *cr*, *nl* parallelæ ipsi *bz*, & occurrentes radio *az* in *m* & *t*, ita sit semper ordinata *cr* ad ordinatam *nl*, vt reciprocè sinus *nt* ad



(a) 2. *huius*. (b) 3. *huius*.

ad finum *cm*. Constat primò ita fore ordinatam *cr* ad ordinatam *hz*, vt reciprocè sinus totus *bz* ad sinum *cm*. Constat secundò, quod *ax*, à puncto *a* ordinata, semper quidem accedet, sed nunquam tamen occurret prædictæ curuæ *zx*. Itaque figuram ipsâ *zb*, arcu circulari *ba*, asymptoto *ax*, & eâ curuâ *zx* comprehensam, quadrantis circularis reciprocam appellamus, duplamque dicimus ipsius quadrantis *zba*.

Iungantur *zc*, *zr*. Quoniam igitur ita est *cr* ad *bz*, vt *bz* ad *cm*; rectangulum *rcm* æquale erit quadrato *bz*, seu *cz*, hoc est quadratis *cm*, *mz*. Est autem rectangulum *rcm* æquale quadrato *cm*, & rectangulo *cmr*: igitur, dempto communi quadrato *cm*, rectangulum *cmr* æquale erit quadrato *mz*. Quare angulus *czr* est rectus; atque adeò tangens, à puncto *c* excitata, parallela erit ipsi *zr*. Porrò, à quodam puncto *k* tangentis *ck* ad partes puncti *a* conuergentis, ducatur *ku* parallela ipsi *cr*, & occurrens *zr* protractę in *u*. Erit parallelogrammum *ckur* duplum trianguli *ckz*, cùm ea constituta sint super eadem basi *ck*, & inter easdem parallelas *ck*, *zu*. Manebit autem prędicta ratio, etiamsi tangens *ck*, ipsique ęqualis ac parallela *ru*, infinitæ paruitatis statuantur. Atque ita semper, si ab omnibus punctis arcus circularis *ab* excitari concipiantur tangentes infinitæ paruitatis, superque earum singulis, & inter easdem parallelas, constitui prædicto modo sua parallelogramma, ac triangula. Porrò constat, quòd figura *zbaxz* æquabitur omnibus illis parallelogrammis, & quadrans circularis *zba* omnibus illis triangulis; nimirum propter infinitam paruitatem excessuum ac defectuum. Igitur figura *zbaxz* ita erit ad quadrantem circularem *zba*, vt vnum parallelogrammum ad vnum triangulum correspondens, nimirum erit eiusdem dupla. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

PAri ratione ostendetur, quòd portio *rcaxr* dupla est sectoris *zca*, vbilibet in arcu circulari *ab* sumptum fuerit ip-

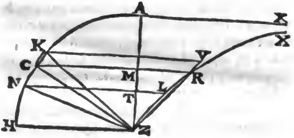
 sum

sum punctum c. Quare ita erit integra figura $zbaxz$ ad portionem $rcaxr$, vt quadrans circularis zba ad sectorem zca, siue vt arcus ab ad arcum ac. Similiter, iunctâ zn, ita erit portio $lnaxl$ ad portionem $rcaxr$, vt arcus an ad arcum ac.

Simili fere ratiocinio demonstratum id leges à P. D. Guidone Grando, geometra præstantissimo, in suis Hugenianis.

PROPOSITIO SEXTA.

TEmpora totalia descensus grauium ex quiete versùs centrum proportionalia sunt arcubus quadrantis circuli, cuius semiaxis sit recta iungens ipsum centrum cum puncto illo spatij, vnde ex quiete cœpit graue descendere.



MAnente figurâ præcedentis propositionis, sit z centrum aliquod grauium, ad quod per az descendere ex quiete intelligatur quoddam graue a. Designentur in radio az duo quęlibet puncta t, & m, vnde ad arcum circularem ab ordinatæ sunt ipsæ tn, mc. Dico ita esse inter se tempora totalia ex quiete ab a in z, ab a in t, ab a in m, vt arcus circulares correspondentes ab, an, ac. Quoniam enim impetus totalis in t ita est ad impetum (a) totalem in m, vt sinus tn ad sinum mc: si partes infinitesimæ spatij t, & m fuerint inter se æquales, ita erit mora singularis in t ad moram (b) singularem in m, vt reciprocè sinus

mc

(a) 2. *huius*. (b) *pranot. 6. nostri tertij, & 4. nostri primi.*

mc ad sinum *tn*; nimirum, ex naturâ curuæ *zx*, vt directè ordinata *nl* ad ordinatam *cr*. Atque ita semper, vbiuis in radio *az* sumpta fuerint ipsa puncta *t* & *m*. Igitur ordinatim applicatæ ab arcu circulari *ab* ad eam curuam *zx* repræsentant moras singulares in singulis æqualibus infinitesimis partibus radij *az*, in quas nempe occurrunt ipsæ ordinatæ. Quare integra figura *zbaxz*, & portiones *lnaxl*, *rcaxr* repræsentabunt tempora totalia ex quiete ab *a* in *z*, ab *a* in *t*, ab *a* in *m*; quæ propterea ita erunt inter se, vt prædicta integra figura, eiusque portiones, nimirum vt arcus (a) circulares *ab*, *an*, *ac*. Quod erat &c.

COROLLARIVM.

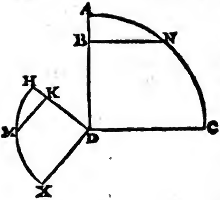
Constat autem eandem rationem subsistere, si graue aliquod proijci intelligatur à centro *z* secundùm aliquam directionem *za*, tanto videlicet impetu, quantus est acquirendus ex quiete ab *a* in *z* secundùm directionem *az*. Ostensum (b) enim iam est, quòd recta *za* æqualibus vbique respectiuè impetibus recurretur, nimirum proportionalibus ordinatim applicatis in ipso quadrante circuli *zba*. Igitur æquali itidem tempore (c) recurretur, seu tota *za*, seu quælibet eius designabilis portio; atque adeò tempora totalia ascensus sursum repræsentabuntur similiter ab arcubus circularibus correspondentibus.

PROPOSITIO SEPTIMA.

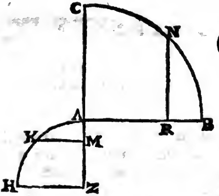
Grauia à qualibet distantiâ æquali tempore perueniunt ex quiete ad centrum commune, & ad quoduis centrum particulare.

Resumptâ figurâ propositionis tertiæ; constat ex eius corollario, quòd impetus ex quiete aggregatus ex *a* in *b* ita est ad impetum ex quiete aggregatum ex *b* in *k*, vt ordinata

(a) *cor. præc.* (b) 4. *huius.* (c) *prænot.* 4. *nostri tertij.*



b n ad ordinatam *k m*. Quare, si *b* talis fuerit portio infinitesima ipsius *a d*, qualis est *k* ipsius *b d*; atque adeò infinitesima *b* ita fuerit ad infinitesimam *k*, vt *a d* ad *b d*, hoc est (existentibus *a d*, *b d* similiter diuisis in *b*, & *k*) vt ordinata *b n* ad ordinatam *k m*, siue, vt impetus totalis in *b* ad impetum totalem in k: patet sanè (a) æquales fore moras infinitesimas temporis in *b*, & in *k*. Atque ita de alijs infinitesimis similibus, & correspondentibus; quæ quidem in vtroque radio æquales multitudine sunt, ipsosque radios omnino adæquant. Igitur tempus totale descensus ex quiete ex *a* in *d* æquale est tempori totali descensus ex quiete ex *b* in *d*. At distantiæ *a d*, *b d* designatæ sunt pro quibuslibet distantijs; atque item punctum *d* sumptum est pro quouis centro grauium, imò etiam venire potest tanquam duplex centrum distinctum. Itaque grauia à qualibet distantiâ æquali tempore ex quiete perueniunt ad centrum commune; & ad quoduis centrum particulare. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM I.

Qvare, existente *z* centro communi grauium, & angulo *b a z* recto, si graue *a* proijciatur secundùm *a b*, perueniet supra planum *a b* ad summam suam altitudinem, vt *a b*, ęquali ipso tempore, quo ex quiete descenderet ex *a* in *z*. Nam tempus, in quo ascendit ad summam

(a) *pranot. 6. nostri tertij, & 3. nostri primi.*

mam altitudinem *ab*, æquale eſt illi, in quo deſcenderet (a) ex quiete ab eadem altitudine vſque ad centrum *a*; atque adeò (per præcedentem) illi etiam æquale, in quo deſcenderet ex quiete ex *a* in centrum commune *z*.

COROLLARIVM II.

PRæterea ſumma ipſa altitudo *ab* ita erit ad *az*, vt impetus proiectionis ſecundùm *ab* ad impetum ex quiete agglomerandum ex *a* in *z*. Nam impetus ille proiectionis ſecundùm *ab* æqualis erit (b) impetui ex quiete acquirendo ex *b* in *a*. Hic autem impetus ex quiete acquirendus ex *b* in *a* ita ſe habet ad impetum ex quiete acquirendum ex *a* in *z*, vt (c) *ab* ad *az*. Igitur conſtat intentum.

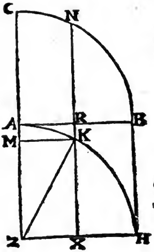
COROLLARIVM III.

HInc tandem; deſcriptis, centro *a*, & interuallis *ab*, *az*, quadrantibus circuli *abc*, *azb*, deſignatisque arcubus ſimilibus *cn*, *ak*, atque ordinatis *nr*, *km*; tempus ex *a* in *r* æquale erit tempori ex *a* in *m*. Nam tempus ex *a* in *m* ita eſt ad tempus ex *a* in *z*, vt (d) arcus *ak* ad arcum *ab*. Similiter tempus ex *a* in *r* ita eſt ad tempus ex *a* in *b*, vt (e) arcus *cn* ad arcum *cb*. Quare tempora ex *a* in *m*, & ex *a* in *r* erunt ſimiles portiones temporum totalium ex *a* in *z*, & ex *a* in *b*. Sunt autem inter ſe æqualia tempora iſta totalia (f) ex *a* in *z*, & ex *a* in *b*. Igitur æqualia etiam inter ſe ſunt tempora prædicta ex *a* in *m*, & ex *a* in *r*. Quod erat propoſitum.

PRO-

(a) *cor. poſt 6. huius*. (b) *cor. 2. poſt 4. huius*. (c) *3. huius*. (d) *6. huius*. (e) *cor. poſt 6. huius*. (f) *cor. 1. præc.*

PROPOSITIO OCTAVA.



E *Xiſtente* z *centro communi grauium, & angulo* b a z *recto ; ſi graue* a *obtinere intelligatur ſecundùm* a b *impetum æqualem illi , quem acquireret in deſcenſu ex quiete per* a z *vſque ad ipſum centrum commune* z *: dico deſcriptum ſemper ab eo iri per infinitas reuolutiones circumferentiam circuli , cuius centrum* z *, radius autem* a z.

SVmptâ enim *a b* æquali ipſi *a z*, fiat centro *a*, & interuallo *a b* quadrans circuli *a b c*. Sit etiam radius *z h* ad angulos rectos ipſi *a z*, & iungatur *b h*. Denique, aſſumpto in *a b* quolibet puncto *r*, ordinatim applicetur *r n*, quæ protracta occurrat arcui *a b* in *k*, vnde ad *a z* ordinatim applicetur *k m*. Iam ſic. Conſtat primò, quòd graue *a*, æquali ipſo tempore deſcenſus ex quiete ab *a* in *z*, ex vi ſolius naturalis agglomerati impetus versùs centrum commune *z*, perfeciſſet (a) ipſam *a b* ex vi prædicti impetus ſecundùm *a b*, dum ſcilicet planum *a b* eius deſcenſui reſtitiſſet. Conſtat ſecundò, æquales fore & ſimiles arcus *c n*, *a k*. Quare, æquali ipſo tempore deſcenſus ab *a* in *m*, perfeciſſet (b) graue *a* ipſam *a r*. Igitur, æquali ipſo tempore deſcenſus ab *a* in *m*, perueniſſet graue *a*, ex vi motus compoſiti, in ipſum punctum *k*. Aſſumptum eſt autem punctum *r* pro quolibet puncto ipſius *a b*. Igitur graue *a*, ex vi motus compoſiti, deſcribet arcum *a b*. Perueniet autem in punctum *b* æquali ipſo tempore deſcenſus ab *a* in *z*, ſiue aſcenſus ab *a* in *b*. Atqui in puncto *b* eliſus (c) omnino fuiſſet impetus ſecundùm *a b*, nimirum per agglomeratos ſub-

(a) *cor.* 1., *&* 2. *præc.* (b) *cor.* 3. *præc.* (c) *cor.* 1. *poſt* 4. *huius*.

ſubnaſcentes impetus versùs centrum particulare *a*. Itaque in puncto *b* ſolus aderit viuus impetus ſecundùm *a z*, ſeu *b b* ipſi parallelam, æqualis nempe illi, quem graue *a* acquiſiuiſſet in deſcenſu ex quiete ab *a* in *z*, ſiue illi, quem acquireret in deſcenſu ex quiete ab *b* in ipſum (a) centrum commune *z*. Quare, ſimili ratione, deſcribet à puncto *b* alterum quadrantem eiuſdem circumferentiæ: atque ita ſucceſſiuè, donec redeat ad ipſum punctum *a*; vnde ſcilicet eiuſdem circumferentiæ deſcriptionem reſumet. Itaque deſcribetur ſemper à graui *a* per infinitas reuolutiones circumferentia circuli, cuius centrum *z*, radius autem *a z*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO NONA.

Dico autem æquali ſemper impetu proceſſurum graue a *in deſcriptione prædicta circunferentia, quantus nempe eſt impetus ab initio poſitus ſecundùm* a b.

REſumptâ enim eadem figurâ, protrahatur *n k* ad *z b* in *x*; & iungatur *z k*. Erit *n r* æqualis ipſi *k x*. Si ergo impetus ſecundùm *a b* ponatur ab initio, vt *c a*, erit impetus acquiſitus in deſcenſu ex quiete ab *a* in *z*, vt *z b*. Porrò in *r* impetus viuus ſecundùm *a b* erit (b) vt *n r*, hoc eſt *k x*: impetus autem ex quiete, acquiſitus ab *a* in *m* erit (c) vt *m k*. Itaque graue *a* obtinebit in *k* impetum *m* k ſecundùm directionem k *x* parallelam ipſi *a z*, & impetum k *x* ſecundùm directionem *m* k parallelam ipſi *a b*. Quare impetus compoſitus erit (d) vt *z* k, hoc eſt *z b*, ſiue *c a*, æqualis nempe impetui, qui ab initio poſitus fuit ſecundùm *a b*. Atqui punctum k ſumptum eſt pro quolibet puncto arcus *a b*. Igitur arcus *a b*, atque adeò tota prædicti circuli circunferentia, deſcribitur æquali ſemper impetu à graui *a*, quantus nempe eſt impetus ab initio poſitus ſecundùm *a b*. Quod erat &c.

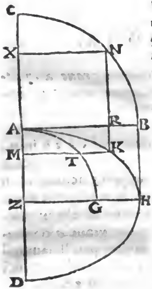
SCHO-

(a) 3. *huius*. (b) 4. *huius*. (c) 2. *huius*. (d) 26. *noſtri primi*.

SCHOLIVM.

CVm dicimus impetum compositum esse vt *zk*, aduerte exprimi dumtaxat eius quantitatem, non verò directionem, quæ sumenda est secundùm tangentem, ductam ex puncto *k* versùs partes *h*, vt constat ex ipsâ demonstratione.

PROPOSITIO DECIMA.



SIn verò impetus ab initio positus secundùm a b *ita sit ad impetum ex quiete acquirendum ab* a *in* z, *vt* a b *maior, aut minor quàm* a z, *ad ipsam* a z: *dico descriptum semper iri à graui* a *per infinitas reuolutiones perimetrum ellypseos, cuius vnus semiaxis sit* z a, & *alter sit* z h *æqualis ipsi* a b.

CEntris enim *a*, & *z*, describantur quadrantes circuli *a b c*, *z a g*. Assumpto autem in *a b* quolibet puncto *r*, ordinatim applicetur *r n*, quæ protracta occurrat in *k* cuidam in altero quadrante ordinatæ *m t*, quæ vtique abscindat arcum *a t* similem arcui *c n*. Denique iungatur *b h*, demittaturque ad *c a* perpendicularis *n x*. Iam sic. Constat primò, quòd graue *a*, æquali ipso tempore descensus ex quiete ab *a* in *z*, perfecisset (a) ipsam *a b*. Quare, æquali ipso tempore descensus ex quiete ab *a* in *z*, perueniet graue *a*, ex vi motus compositi, in punctum *b*. Constat secundò, quòd, æquali ipso tempore descensus ex quiete ab *a* in *m*, perfecisset (b) graue *a* ipsam *a r*. Quare, æquali ipso tempore descen-
sus

(a) *cor.* 1. & 2. *post* 7. *huius*. (b) *cor.* 3. *post* 7. *huius*.

sus ex quiete ab *a* in *m*, perueniet graue *a*, ex vi motus compositi, in punctum *k*. Constat tertiò ita fore (propter similitudinem arcuum) *zg* ad *mt*, vt *ab* ad *nx*, seu *zb* ad *mk*: atque ita semper, vbiuis sumptum fuerit punctum *k* in lineâ, ex vi motus compositi, descriptâ. Igitur, cum semiaxis *zb* ita sit semper ad ordinatam *mk*, vt, in quadrante circuli *zag*, radius *zg* ad ordinatam *mt*; erit linea *akb*, ex vi motus compositi descripta, quadrans curuæ ellypticæ, cuius vnus semiaxis est ipsa *za*, & alter semiaxis est *zb*. Atqui in puncto *b* elisus (a) omnino fuisset impetus secundùm *ab*, nimirum per agglomeratos subnascentes impetus versùs centrum particulare *a*. Itaque in puncto *b* solus aderit viuus impetus secundùm *az*, aut *bh* ipsi parallelam, æqualis nempe illi, quem graue *a* acquisiuisset in descensu ex quiete ab *a* in *z*; qui propterea ita se habebit ad impetum ab initio positum secundùm *ab*, siue ad impetum ex quiete acquirendum ab *b* in *z*, vt *az*, (b) ad *ab*, seu *bh* ad *bz*. Quare, simili ratione, describet graue *a* alterum quadrantem curuæ ellypticæ, cuius nempe vnus semiaxis sit ipsa *zh*, & alter sit *zd* æqualis ipsi *bh*. Porrò autem satis constat, quòd quadrantes ellyptici *zba*, *zbd* pertinent ad eandem ellypsin. Rursum à puncto *d* prosequetur graue *a*, ob eandem rationem, descriptionem eiusdem curuæ ellypticæ, donec redeat ad ipsum punctum *a*; vnde scilicet eiusdem perimetri descriptionem resumet. Itaque describetur semper à graui *a* per infinitas reuolutiones perimeter ellypseos, cuius vnus semiaxis sit *za*, & alter sit *zb* æqualis ipsi *ab*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

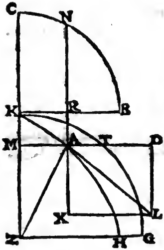
Hinc habes primò, quòd tempus integræ descriptionis perimetri circuli, aut ellypseos, est quadruplum illius, quo omnia grauia à quacunque distantiâ peruenire intelliguntur ad centrum commune, aut particulare ipsorum grauium. Habes secun-

(a) *cor.* 1. *post* 4. *huius*. (b) 3. *huius*.

cundò, quòd in singulis reuolutionibus, quibus ellypsis describitur, æqualem semper impetum compositum obtinet graue in punctis æquè distantibus à centro: maximum quidem in vertice axis minoris; minimum verò in vertice axis maioris: cæteros autem impetus in punctis intermedijs; minores quidem & minores à vertice axis minoris vsque ad verticem axis maioris; maiores autem & maiores à vertice axis maioris vsque ad verticem axis minoris. Quæ omnia facili ratiocinio colligi possunt ex prædictis.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Existente autem z *centro communi grauium, & angulo* l a z *acuto, vel obtuso; si graue* a *obtinere intelligatur impetum secundùm* a l, *qui ita sit ad impetum ex quiete acquirendum ab* a *in* z, *vt qualibet* a l *ad ipsam* a z: *dico descriptum semper ab eo iri per infinitas reuolutiones perimetrum ellypseos infrà exponendæ.*



Esto enim ellypsis *z k b*, ad cuius semiaxem *z k* perpendicularis sit *k b* æqualis alteri semiaxi *z b*. Sint etiam, centris *k*, & *z*, quadrantes circuli *k b c*, *z k g*. Rursum per *a* ordinetur *m t* in quadrante *z k g*, & *r n* in quadrante *k b c*. Denique in *m a*, & *n a* protractis sumantur *a d* & *a x* æquales ipsis *r n*, *m t*. Si ergo posita *a l* tangat ellypsin in *a*, sitque diameter rectanguli ipsis *a d*, *a x* contenti: dico *z k b* quadrantem esse illius ellypseos, cuius perimeter describetur semper per infinitas reuolutiones ab ipso graui *a*. Si enim prædictum graue constitutum ab initio intelligatur in *k* cum impetu secundùm *k b*, qui ita

ita sit ad impetum ex quiete acquirendum à *k* in *z*, vt *kb* ad kz, seu *c*k ad *zg*: constat vtique descriptum (a) semper ab eo iri per infinitas reuolutiones perimetrum ellypseos, cuius vnus semiaxis sit *z*k, & alter sit *zb* æqualis ipsi k*b*. Dum autem graue perueniſſet à k in *a*, obtineret ibi (b) secundùm *ma* impetum vt *rn*, siue *ad*; & secundùm *na* impetum (c) vt *mt*, siue *ax*. Quare impetus compositus erit vt *al* secundùm ipsam contingentem *al*. Itaque obtinebit ibi secundùm eandem directionem *al* æqualem ipsum impetum, qui positus fuit pro hypothesi huius propositionis. Nam impetus secundùm *al*, quem obtinet graue in *a* post descriptionem curuæ ellypticæ *ka*, ita est ad impetum ex quiete acquirendum à *k* in *z*, vt *al* ad *kz*, vt satis constat ex dictis: impetus autem ex quiete acquirendus à *k* in *z*, ita est ad impetum ex quiete acquirendum ab *a* in *z*, vt *kz* ad *az*. Igitur, ex æquo, impetus ille secundùm *al* ita est ad impetum ex quiete acquirendum ab *a* in *z*, vt *al* ad *az*: quod vtique pro hypothesi huius propositionis positum fuerat. Porrò manifestum est, quòd graue *a* cum eo impetu secundùm *al* eandem curuam describet, siue punctum *a* statuatur initium motus, siue non. Igitur prædicta curua ellyptica describetur semper per infinitas reuolutiones ab ipso graui *a*. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM I.

SVpponere hîc vniuersim videmur, quòd in descriptione curuarum motus compositus sit semper secundùm contingentes. Hoc autem opportuniùs demonstratum inuenies in proposit. 17. huius libri.

SCHOLIVM II.

QVod autem innuit P. Thomas Ceua in suâ Philosophiâ nouo-antiquâ carmine exaratâ, dissert. 4. motum videlicet proiectorum æternum quidem esse, sed per circuitum ex qua-

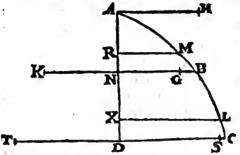
T 2 tuor

(a) *prop. præc.* (b) 4. *huius*. (c) 2. *huius*.

tuor ſegmentis parabolicis conſtitutum ; id planè ſequitur ex ſyſtemate Galilei de motu vniformiter accelerato, cui tunc, ob tanti viri auctoritatem, mordicus adhærebat. Illud autem ſuperuacaneum eſt admonere ; in eâ diſtantiâ, in quâ ſumus à centro communi ; ſyſtema Galilei à ſyſtemate noſtro diſcerni ſenſu vix poſſe.

PROPOSITIO DVODECIMA.

E*Sto ſemiparabola, cuius diameter* a d, *& latus rectum* a h. *Ordinatim applicentur* d c *maior, &* n b *minor. Dico ſumi poſſe in diametro* a d *duo puncta* x, *&* r, *tum aquè diſtantia à punctis* d, *&* n, *tum proximiora vertici quàm ipſa puncta* d, *&* n; *adeò vt, ordinatim applicatis* x l, r m, *ratio exceſſus ordinatæ* d c *ſupra ordinatam* x l, *ad exceſſum ordinatæ* n b *ſupra ordinatam* r m, *ſemper magis ſine vllo termino accedat ad aqualitatem cum ratione reciprocâ ipſius ordinatæ* n b *ad ordinatam* d c.



E*Xceſſus ipſius *dc* ſupra *xl* ſit *sc*; ipſius autem *nb* ſupra *rm* ſit *gb*. Rurſum ipſarum *dc*, *nb* duplæ ſint *tc*, *kb*. Iam ſic. Quoniam quadratum *dc* æquatur rectangulo *dab*, & quadratum *xl* rectangulo *xab*; exceſſus quadrati *dc* ſupra quadratum *xl* æquabitur rectangulo ex *dx* in *ab*. Similiter exceſſus quadrati *nb* ſupra quadratum *rm* æquabitur rectangulo ex *nr* in *ab*. Sunt autem æquales ipſæ *dx*, *nr*, & *ab* eſt communis. Igitur exceſſus quadrati *dc* ſupra quadratum *xl* æqualis eſt exceſſui quadrati *nb* ſupra quadratum *rm*. At rurſum exceſſus quadrati *dc* ſupra quadratum *xl* æquatur duplo rectangulo *csd*, & vni quadrato *sc*; ſiue, æquatur vni rectangulo *cst*: atque item, ſimi-

li

li ratione, excessus quadrati *nb* supra quadratum *rm* æquatur rectangulo *bgk*. Igitur æqualia inter se sunt rectangula *cst*, *bgk*. Quare ita erit *sc* ad *gb*, vt reciprocè *kg* ad *ts*. Porrò autem, si puncta *x*, & *r* proximiora semper sumantur ipsis *d*, & *n*; ratio *kg* ad *ts* semper magis sine vllo termino accedet ad æqualitatem cum ratione ipsius *nb* ad *dc*: quandoquidem ipsæ *nb*, *dc* semper magis sine vllo termino accedent, vt sint æquales medietatibus prædictarum k*g*, *ts*, atque adeò in eadem cum ipsis ratione. Igitur, si puncta *x*, & *r* proximiora semper sumantur ipsis *d*, & *n*; ratio *sc* ad *gb*, nimirum excessus ordinatæ *dc* supra ordinatam *xl*, ad excessum ordinatæ *nb* supra ordinatam *rm*, semper magis sine vllo termino accedit ad æqualitatem cum ratione reciprocâ ipsius ordinatæ *nb* ad ordinatam *dc*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

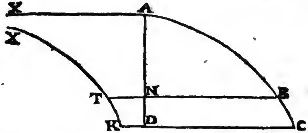
HInc, ordinatis in parabolâ duabus quibusuis *dc*, *nb*; ratio infinitesimæ, per quam *dc* excedit proximè ordinatam viciniorem vertici, ad infinitesimam, per quam *nb* excedit proximè vniformiter ordinatam viciniorem vertici, æquatur rationi reciprocæ ipsius ordinatæ *nb* ad ordinatam *dc*. Quoniam enim ratio excessus ordinatæ *dc* supra ordinatam *xl* viciniorem vertici, ad excessum ordinatæ *nb* supra ordinatam *rm* viciniorem itidem vertici, semper magis sine vllo termino accedit ad æqualitatem cum prędictâ ratione; consequens planè est, vt in eam æqualitatem veniatur, dum ipsæ *xl*, *rm* fuerint omnino proximæ prædictis ordinatis *dc*, *nb*.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

SI quoddam graue hâc ratione descendere intelligatur versùs aliquod centrum, vt in singulis æqualibus temporibus æquales velocitatis gradus acquirat: ratio impetuum totalium, quos graue

graue in descensu obtinebit, æquabitur rationi directæ ordinatim applicatarum in parabolâ, cuius diameter sit recta iungens prædictum centrum cum puncto illo spatij, vnde ex quiete cœpit graue descendere.

Esto parabola, cuius diameter *a d*. Concipiatur graue *a* hâc ratione descendere ex quiete per *a d* versùs centrum *d*; siue istud sit centrum commune grauium, siue particulare; vt in sin-



gulis æqualibus infinitesimis partibus temporis æquales velocitatis gradus acquirat versùs ipsum centrum *d*: assumptisque in *a d* duobus quibuslibis punctis *d*, & *n*, ordinatim applicentur *d c*, *n b*. Dico impetum totalem aggregatum in *d*, ita fore ad impetum totalem aggregatum in *n*, vt ordinatim applicata *d c* ad ordinatim applicatam *n b*. Intelligatur enim ad alias partes constituta talis curua, ad quam protractis in *k*, & *t*, ipsis *c d*, *b n*, ratio *d k* ad *n t* æquetur rationi reciprocæ ipsius *n b* ad *d c*. Erit *d*k ad *n t*, vt infinitesima, per quam *d c* excedit (a) proximè ordinatam viciniorem vertici, ad infinitesimam, per quam *n b* excedit proximè vniformiter ordinatam viciniorem vertici. Atq; ita de cæteris ordinatim applicatis ad prædictam curuam. Porrò autem parallela ipsi *d k* ducatur *a x* versùs partes prædictæ curuæ; cui vtique nunquam occurret, vtcunque illa protrahi intelligatur. Quoniam igitur *n b* ordinatim applicata in parabolâ æqualis est omnibus simul infinitesimis, per quas ordinatę omnes applicatę in parabolâ inter puncta *a*, & *n*, remotior quidem à vertice excedit alteram sibi proximam vicinio-

(a) *cor. præc.*

viciniorem vertici, quemadmodum figura *xantx* aggregata concipitur ex omnibus simul ad ipsam curuam *xt* ordinatim applicatis inter puncta *a*, & *n*: quod quidem consimiliter valet de *dc* ordinatim applicatâ in parabolâ, ac de figurâ *xadkx*: consequitur planè ità esse figuram *xadkx* ad figuram *xantx*, vt ordinatim applicata *dc* ad ordinatim applicatam *ab*. Quare, si graue *a* ita ex quiete descendere intelligatur per *ad*, vt in singulis æqualibus infinitesimis partibus ipsius *ad* acquirat impetus singulares proportionatos ordinatim applicatis ad prædictam curuam *xk*; ratio impetus acquisiti in quadam parte spatij infinitesimâ *d*, ad impetum acquisitum in alterâ qualibet æquali parte spatij infinitesimâ *n*, æquabitur rationi reciprocæ ipsius figuræ *xantx* ad figuram *xadkx*; hoc est, rationi reciprocę impetus totalis aggregati in *n* ad impetum totalem aggregatum in *d*: siquidem constat eas figuras proportionatas fore prædictis impetibus totalibus, cùm ipsæ ordinatim applicatæ, ex quibus omnibus eæ figuræ aggregatæ concipiuntur, proportionatæ ponantur impetibus singularibus successiuè à graui *a* in suo descensu acquisitis. Vt autem impetus totalis in *n* ad impetum totalem in *d*; ita reciprocè mora (a) infinitesima temporis in *d* ad moram infinitesimam temporis in *n*. Igitur impetus acquisitus in parte spatij infinitesimâ *d* ita erit ad impetum acquisitum in alterâ æquali parte spatij infinitesimâ *n*, vt directè mora infinitesima temporis in *d* ad moram infinitesimam temporis in *n*. Atqui ratio ista concipiendi nouos & nouos successiuè impetus proportionatos temporibus, eadem ipsa est, quam pro hypothesi statuimus in titulo huius propositionis, quòd (b) nempe in singulis æqualibus temporibus ęquales velocitatis gradus à graui acquirantur. Igitur (stante hâc hypothesi) ratio impetus totalis aggregati in quolibet puncto *d*, ad impetum aggregatum in quolibet altero puncto *n*, æquabitur rationi directæ figurarum *xadkx*, *xantx*, hoc est ipsarum *dc*, *nb* ordinatarum in parabolâ. Quod erat &c.

SCHO-

(a) 4. *nostri primi.* (b) *pranot.* 1. *huius.*

SCHOLIVM.

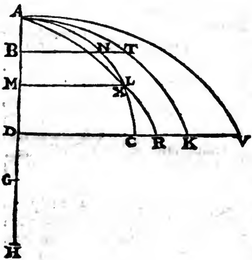
Atque hic rursum locum habet obseruatio similis illi, quam potes, si placet, recolere in scholio post secundam huius.

ADMONITIO.

Rationem prædictam augendi impetus deorsum appellabimus in posterum hypothesin Galilæanam.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

Esto quadrans circuli dac, *cuius centrum* d. *Sint etiam duæ semiparabolæ, quarum axis* ad; *vna* dak, *altera* dar. *Porrò* dr *sit minor ipsâ* dk; *ipsa verò* dk *possit duplum quadratum ipsius* dc. *Dico lineam parabolicam* ak *cadere totam extra quadrantem circuli, sed non etiam lineam parabolicam* ar.



Nam, sumptâ *ab* duplâ ipsius *da*, seu *dc*, quadratum ordinatæ *dk* æquale erit duplo quadrato *dc*, siue vni rectangulo *dab*; atque adeò *ab* erit latus rectum parabolæ *dak*. Iam à quolibet puncto *b* ipsius *ad* ordinetur in circulo ipsa *bn*; & *bt* in parabolâ *dak*. Constat *bt* maiorem fore quàm *bn*; siquidem quadratum *bt* æquale erit

erit rectangulo *b a b*, cùm quadratum *b n* æquale sit minori rectangulo *a b b*. Atque ita de quibusuis alijs ordinatim applicatis ab eodem puncto axis *a d*. Igitur linea parabolica *a k* cadit tota extra quadrantem circuli. Quod erat priore loco demonstrandum.

Iam verò, lineam alteram parabolicam *a r* non cadere totam extra quadrantem circuli, si punctum *r* incidat in punctum *c*, aut inter puncta *c* & *d*, res est ex se satis perspicua. Itaque punctum *r* situm sit inter puncta *c*, & *k*. Latus autem rectum parabolæ *d a r* sit quædam *a g*, quæ minor quidem erit ipsâ *a b*, sed maior ipsâ *a d*. Porrò autem sumatur in *a d* quędam *a m* æqualis ipsi *g b*; & ordinentur, in circulo quidem *m x*; & *m l* in parabolâ. Constat eandem ipsam rectam fore *m x*, & *m l*. Nam quadratum ipsius *m x* ordinatæ in circulo æquatur rectangulo *a m b*: quadratum autem ipsius *m l* ordinatæ in parabolâ æquatur rectangulo *m a g*, siue *a m b*, propter æqualitatem ipsarum *a m*, *g b*. Igitur æquales inter se sunt ipsæ *m x*, *m l*. Sunt etiam ad angulos rectos ipsi *a d* ab eodem puncto *m* excitatæ. Quare eadem ipsa est recta *m x*, atque *m l*; ac propterea linea parabolica *d a r* non cadit tota extra quadrantem circuli. Quod erat posteriore loco demonstrandum.

COROLLARIVM I.

HInc; stante communi axe *a d*, si fiat quædam parabola *d a u*, cuius latus rectum maius sit quàm dupla ipsius *a d*, poterit alia quædam linea parabolica, nimirum ipsa *a* k, secare angulum contentum sub eâ curuâ parabolicâ *a u*, & circuli circunferentiâ *a c*. Quemadmodum, datâ parabolâ *d a r*, cuius latus rectum minus est quàm dupla ipsius *a d*, duci potest quædam alia curua parabolica secans circunferentiam circuli inter puncta *a*, & *x*, atque adeò secans etiam angulum contentum sub curuâ parabolicâ *a r*, & circuli circunferentiâ *a c*. Quare solius parabolæ *d a* k, cuius latus rectum æquatur duplæ ipsius

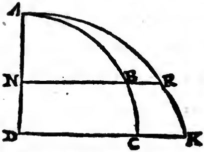
radij *a d*, proprium id eſt, vt ſtante eo communi axe *a d*, nulla alia linea parabolica ſecare poſſit angulum contentum ſub ipsâ lineâ parabolicâ *a* k, & circuli circunferentiâ *a c*.

COROLLARIVM II.

HInc rurſum fit, quòd infiniteſima ordinatim applicata in circulo ab ipſo vertice *a*, eadem ipſa ordinatim applicata intelligatur in parabolâ *d a* k. Cuius rei vlterior adhuc, ac facilior ratio reddi poteſt; quia nempe rectangulum, cui æquatur quadratum infiniteſimæ ordinatæ in circulo ab ipſo vertice *a*, deficit à rectangulo, cui æquatur quadratum infiniteſimæ ordinatæ in parabolâ *d a* k ab eodem vertice *a*, per quadratum communis ſagittulæ inter verticem *a*, & eas ordinatas interiectæ. Hic autem defectus tanquam nullus habetur apud geometras. Itaque illæ ordinatæ haberi debent tanquam æquales, imò tanquam vnica eademque ipſa ordinata. Quod quidem non valere, ſi aſſumatur alia parabola, cuius latus rectum maius ſit, aut minus quàm dupla ipſius radij *a d*, ſatis patebit conſideranti.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

SI graue a *deſcendere intelligatur ex quiete per* a d *vſque ad ipſum centrum* d; *primâ quidem vice iuxta noſtram hypotheſin; tum etiam alterâ vice iuxta hypotheſin Galilæanam; ratio impetuum totalium, quos graue* a *obtinebit in qualibet eadem infiniteſimâ ſpatij parte, æquabitur rationi ordinatæ in quadrante circuli* d a c, *cuius centrum* d, *ad ordinatam in ſemiparabolâ* d a k, *cuius latus rectum æquetur duplæ ipſius radij* a d, *qui idem axis ſit eiuſdem parabolæ* d a *k*.



Aſſumpto

Assumpto enim in *a d* quolibet puncto *n*, ordinetur *n b* in circulo, & *n r* in parabolâ. Dico ita esse impetum totalem aggregatum in *n* in descensu ex quiete per *a n* iuxta nostram hypothesin, ad impetum totalem ibidem aggregatum in descensu per *a n* iuxta hypothesin Galilæanam, vt ordinata *n b* ad ordinatam *n r*. Nam impetus acquisitus in primâ infinitesimâ *a* iuxta nostram hypothesin, est æqualis impetui acquisito in eadem primâ infinitesimâ *a* iuxta hypothesin (a) Galilæanam. Est etiam infinitesima ordinata in circulo ab ipso vertice *a* æqualis infinitesimæ (b) ordinatæ in eâ parabolâ *d a k* ab eodem vertice *a*. Igitur ordinatim applicatæ in circulo, & in eâ parobolâ *d a k* ab ipso vertice *a*, proportionantur impetibus iuxta duplicem hypothesin acquisitis in primâ infinitesimâ *a*. At verò, si infinitesima ordinata in circulo ab ipso vertice *a* repræsentare statuitur impetum acquisitum iuxta nostram hypothesin in ipsâ primâ infinitesimâ *a*; etiam *n b* ordinata (c) in eodem circulo repræsentabit impetum totalem aggregatum in *n* in descensu ex quiete per *a n* iuxta nostram hypothesin. Similiter autem, si infinitesima ordinata in parabolâ ab eodem vertice *a* repræsentare statuitur impetum acquisitum iuxta hypothesin Galilæanam in eadem primâ infinitesimâ *a*; etiam *n r* ordinata (d) in eadem parabolâ repræsentabit impetum totalem aggregatum in *n* in descensu ex quiete per *a n* iuxta hypothesin Galilæanam. Igitur, si *n b* repræsentare statuitur impetum totalem aggregatum in *n* iuxta nostram hypothesin, similiter *n r* repræsentabit impetum totalem ibidem aggregatum iuxta hypothesin Galilæanam. Quare ita erit impetus totalis aggregatus in *n* in descensu ex quiete per *a n* iuxta nostram hypothesin, ad impetum totalem ibidem aggregatum in descensu ex quiete per *a n* iuxta hypothesin Galilæanam, vt *n b* ordinata in circulo ad *n r* ordinatam in eâ parabolâ *d a k*. Quod erat demonstrandum.

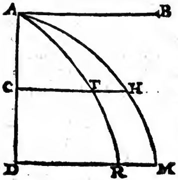
(a) *prænot. 2. huius*. (b) *cor. 2. præc.* (c) *2. huius*. (d) *13. huius*.

COROLLARIVM.

QVare impetus totalis aggregatus in centro *d* in descensu ex quiete per *a d* iuxta nostram hypothesin, ita erit ad impetum totalem ibidem aggregatum in descensu ex quiete per *a d* iuxta hypothesin Galilæanam, vt *d c* ordinata in circulo ad *d k* ordinatam in eâ parabolâ *d a k*, nimirum vt quædam recta ad aliam potentem duplum eiusdem quadratum.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

EXistente d *centro aliquo grauium, & angulo* b a d *recto; si graue quodpiam* a *descendere intelligatur ex quiete secundùm parallelas ipsi* a d; *primâ quidem vice motu accelerato iuxta hypothesin Galilaanam; tum etiam alterâ vice motu accelerato iuxta nostram hypothesin; dum interim ipsum graue* a *aquali in vtraque hypothesi, eoque semper aquabili impetu fertur secundùm parallelas ipsi* a b: *describet vtiq; motu composito duas curuas, vt* a r *iuxta hypothesin Galilaanam, &* a m *iuxta nostram; ad quas si à duobus quibusuis punctis* d, *&* c *ipsius axis* a d *ordinentur* d r m, c t h: *Dico ita fore inter se rectas* d r, c t, d m, c h, *quomodolibet comparatas, vt tempora correspondentia ex* a *in* d, *& ex* a *in* c *iuxta hypothesin Galilaanam; atque item ex* a *in* d, *& ex* a *in* c *iuxta nostram hypothesin. Rursum curua* a r *erit parabolica.*



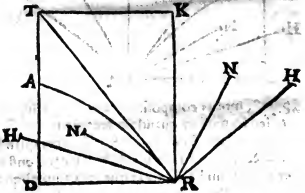
ET prior quidem pars satis ex se manifesta videtur. Quoniam enim graue *a* æquali in vtraque hypothesi, eoque semper æquabili impetu fertur secundùm parallelas prædictæ *a b*; consequens

quens planè eſt (*ex 2. noſtri primi*) vt rectæ *dr*, *ct*, *dm*, *cb* quomodolibet comparatæ, proportionales ſint temporibus, in quibus eæ percurri intelliguntur, nimirum temporibus correſpondentibus ex *a* in *d*, & ex *a* in *c* iuxta hypotheſin Galilæanam; atque item ex *a* in *d*, & ex *a* in *c* iuxta noſtram hypotheſin. Quod erat priore loco propoſitum.

Poſterior autem pars ita euincitur. Nam impetus aggregati ex *a* in *d*, & ex *a* in *c* iuxta hypotheſin Galilæanam, proportionales ſunt temporibus correſpondentibus, nimirum (ex priore parte huius propoſitionis) ipſis rectis *dr*, *ct*. Illi autem ſunt inter ſe, vt rectæ ordinatæ in parabolâ à punctis *d*, & *c* ipſius (a) axis *ad*. Igitur prædictæ rectæ *dr*, *ct* ſunt ordinatæ in parabolâ, cuius nempe axis *ad*. Quamobrem curua *ar* eſt parabolica. Quod erat poſteriore loco demonſtrandum.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Esto figura curua d a r, *quam tangat in quolibet puncto* r *quadam* r t, *occurrens ipſi* d a *protracta in* t. *Sit etiam re-*

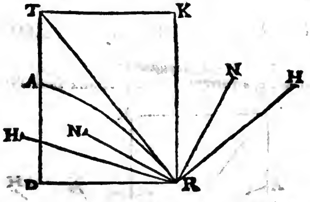


ctus angulus a d r. *Rurſum intelligatur curua* a r *deſcribi ex duobus motibus; vno ſecundùm* a d, *vel eidem parallelas; altero ſecun-*

(a) 13. *huius*.

secundùm dr, *siue ipsi parallelas*, *acceleratis*, *aut retardatis in decursu*, *siue vtroque*, *siue vno tantùm*; *prout nimirum pati poterit ipsius proposita curuæ natura. Dico primò impetum compositum in* r *fore secundùm contingentem* tr. *Dico secundò ita fore in* r *impetum viuum componentem secundùm* dr, *ad impetum viuum componentem secundùm* ad, *vt ordinata* dr *ad ipsam* dt *interiectam nempe inter eam ordinatam* dr, *&* *contingentem* tr. *Atque ita quidem*, *etiamsi descriptio illius curuæ procedere intelligatur à puncto* r *versùs punctum* a, *inuersâ nimirum prædictorum impetuum directione.*

CLaritatis gratiâ, considerabimus inuerso modo descriptionem prædictę curuę, nimirum à puncto *r* versùs punctum *a*. Iam



verò, si fieri potest, motus compositus in *r* non sit secundùm contingentem *rt*, sed secundùm quandam secantem *rb*. Constat primò angulum mistilineum *bra* diuisibilem fore per quandam aliam rectam *nr*, quæ & ipsa secans sit prædictę curuę. Constat secundò, quòd, si graue quodpiam habere ponatur impetum aliquem secundùm *rb*, non inibit alteram viam, vt *rn*, nisi alius impetus secundùm quandam aliam directionem adiunctus intelligatur, qui vtique rationem habeat non infinitè paruam ad eum impetum secundùm *rb*. Potest autem manifestum id esse ex propositione 25. no-
stri

ſtri libri primi. Conſtat tertiò, quòd impetus iſte nouus adiunctus eſſe debebit màior (dum tamen eadem directio retineatur) ſi maior fuerit ipſe angulus *hrn*: Ex citatâ quippe propoſitione id etiam colligi facilè poteſt. Quare, cùm angulus miſtilineus *hra* maior ſit angulo rectilineo *hrn*, fieri nequibit, vt graue citatum impetu quodam ſecundùm *rh* ineat viam ipſius curuæ *ra*, niſi prædicto impetui ſecundùm *rh* adiungi inibi intelligatur impetus alius ſecundùm quandam aliam directionem, qui rationem habeat non infinitè paruam ad eum impetum ſecundùm *rh*. Igitur talis impetus adiungi deberet in caſu noſtro. Hoc autem abſurdum eſt: Tunc enim motus compoſitus non foret ſecundùm *rh*, vt erat hypotheſis, ſed ſecundùm quandam aliam directionem facientem cum curuâ *ra* angulum minorem ipſo *hra*. Quoniam igitur motus compoſitus (intelligimus de adæquato) nequit eſſe ſecundùm vllam ſecantem, is erit omnino ſecundùm contingentem *rt*, quæ vtique efficit cum curuâ *ra* angulum minorem quolibet angulo rectilineo. Quòd autem ibi in *r* alius quidam impetus ſecundùm quandam aliam directionem adiungi intelligatur, negotium facere non poteſt; quoniam is impetus rationem infinitè paruam dicet ad prædictum impetum ſecundùm contingentem *rt*. Porrò autem, quod poſteriore loco demonſtrandum à nobis eſt, facilè vtique conſtat ex corollario propoſitionis 25. noſtri primi, adiunctâ obſeruatione factâ in definitione poſt 14. eiuſdem libri. Conſtat etiam hæc valere, ſeu deſcriptio illius curuæ procedat à puncto *r* verſùs *a*, ſiue incipiat à puncto *a* verſùs *r*, dum ſcilicet inuertatur impetuum directio: Itaque conſtant propoſita.

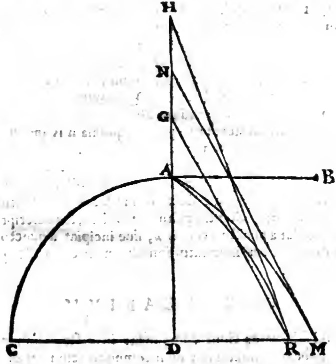
COROLLARIVM.

QVòd ſi impetus viuus componens in *r* ſecundùm *rd* ita ſe habeat ad impetum viuum componentem ſecundùm quandam *rk* parallelam & æqualem ipſi *dt*, vt *rd* ad *rk*; conſtabit è conuerſo iunctam *rt* fore contingentem. Nam motus compoſitus

positus erit secundùm diametrum *rt*. Igitur, per præcedentem, ipsa *rt* erit contingens. Idem porrò valet, inuersâ impetuum directione, si spectetur descriptio illius curuæ à puncto *a* versùs punctum *r*.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Datâ ad eius extremum, quod non sit vertex, tangente figura curua, cuius ordinata repræsentant tempora totalia in descensu grauium exquiete vsque ad centrum, iuxta nostram hypothesin, habetur quadratura circuli.



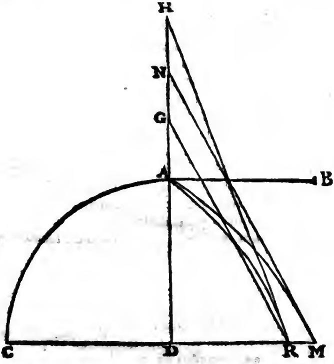
Esto figura curua *dam*, cuius ordinatæ ab axe *ad* repræsentent tempora totalia in descensu ex quiete per *ad* vsque ad

ad ipsum centrum *d*, iuxta nostram hypothesin. Data sit etiam tangens *mn*, occurrens *da* protractæ in *n*. Dico rectam *dn* æqualem esse arcui quadrantis circuli *dac*, cuius centrum *d*.

Protractâ enim *da*, sumatur *dg* media proportionalis inter *da*, & *db* duplam ipsius *da*. Tum ducatur *gr* parallela ipsi *nm*, & occurrens *dm* in *r*. Denique fiat parabola *dar*, cuius axis *ad*: Hanc tanget in *r* iuncta *hr*. Iam verò, curua parabolica *ar* intelligi potest descripta ex duplici motu, vno semper æquabili secundùm parallelas horizontali *ab*, & altero secundùm parallelas ipsi *ad*, naturaliter (a) accelerato iuxta hypothesin Galilæanam. Similiter curua *am* intelligi potest descripta, ex vno quidem motu semper æquabili secundùm parallelas prædictæ horizontali *ab*, & altero secundùm parallelas eidem *ad*, naturaliter accelerato (b) iuxta nostram hypothesin. Porrò ostendemus antea, impetum horizontalem in descriptione vnius curuæ æqualem esse impetui horizontali in descriptione alterius. Et quidem in descriptione curuæ parabolicæ *ar*, ita se habet in *r* impetus viuus componens secundùm *dr* parallelam horizontali *ab*, ad alterum impetum viuum (c) componentem, qui est secundùm parallelam ipsi *ad*, vt *dr* ad *dh*. Constat autem impetus istos viuos componentes, vnum quidem esse impetum ipsum horizontalem positum semper æquabilem in descriptione illius curuæ, alterum autem esse illum, qui ex quiete aggregari posse intelligitur ex *a* in *d* iuxta hypothesin Galilæanam. Viuos, inquam, propter angulum (d) semper rectum vnius directionis ad alteram. Rursum impetus ex quiete aggregandus ex *a* in *d* iuxta hypothesin Galilæanam, ita se habet ad impetum ex quiete aggregandum ex *a* in *d* iuxta nostram hypothesin, vt recta *dg* ad quamdam, quæ possit dimidium (e) ex eâ quadrati, nempe vt *dg* ad *da* (est enim quadratum mediæ proportionalis *dg* æquale rectangulo *hda*, hoc est duplo quadrato *da*) siue, vt *db* ad *dg*. Tandem, in descriptione curuæ *am*, ita se habet in *m* impetus

(a) 16. *huius*. (b) 16. *huius*. (c) *prop. præc.* (d) *in def. post* 14. *nostri primi*. (e) *cor. post* 15. *huius*.

viuus componens secundùm parallelam ipsi *a d*, ad alterum impetum viuum (a) componentem, qui est secundùm *d m* parallelam horizontali *a b*, vt *dn* ad *dm*, siue, vt *dg* ad *d r*. Atque hîc etiam similiter constat, impetus istos viuos componentes, poste-



riorem quidem esse impetum ipsum horizontalem positum semper æquabilem in descriptione curuæ *a m*; priorem autem esse illum, qui ex quiete aggregari posse intelligitur ex *a* in *d* iuxta nostram hypothesin. Igitur, ex æquo, impetus horizontalis semper æquabilis in descriptione curuæ parabolicæ *a r*, ita se habet ad impetum horizontalem semper æquabilem in descriptione curuæ *a m*, vt *dr* ad *dr*. Quare vnus impetus est alteri æqualis.

Bre-

(a) *prop. prac.*

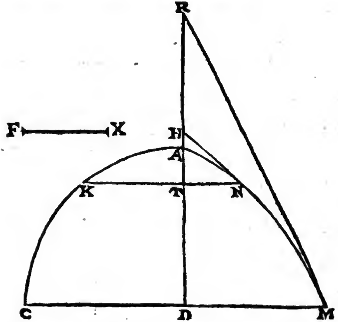
Breuiùs. In deſcriptione parabolæ, iuxta hypotheſin Galilæi, impetus componentes ſunt, vt *bd* ad *dr*. In deſcriptione autem noſtræ curuæ, iuxta noſtram hypotheſim, impetus componentes ſunt, vt *gd* ad *dr*. Cùm igitur oſtenſum ſit, impetus verticales in deſcriptione vtriusque curuæ eſſe, vt *bd* ad *gd*; etiam impetus horizontales erunt inuicem, vt *dr* ad *dr*; atque adeò æquales.

Quoniam igitur impetus horizontalis in deſcriptione vtriusque curuæ eſt, vt *dr*; eoque ſemper æquabili perficit graue *a* ipſam *dm*, æquali ipſo tempore deſcenſus ex *a* in *d* iuxta noſtram hypotheſin: conſequens planè eſt, vt graue *a* impetu quodam, vt *dg*, ſemper æquabili, perficere debeat, æquali prædicto tempore, rectam (a) æqualem ipſi *dn*. Atqui graue *a* impetu illo, vt *dg*, ſemper æquabili (quem vtique oſtendimus æqualem eſſe illi, qui ex quiete aggregari poſſe intelligitur ex *a* in *d* iuxta noſtram hypotheſin) perficeret, æquali prædicto tempore, arcum (b) quadrantis circuli *dac*. Itaque recta *dn* æqualis eſt arcui prædicto. Quare, datâ prædictâ tangente figuræ curuæ, cuius ordinatæ repræſentant tempora totalia in deſcenſu grauium iuxta noſtram hypotheſin, habetur quadratura circuli. Quod erat demonſtrandum.

(a) *3. noſtri primi.* (b) 8. 9. *& cor. poſt* 10. *huius.*

PROPOSITIO DECIMANONA.

Datâ, præterquam ad verticem, qualibet tangente prædictæ curuæ, habetur quadratura circuli.



Repetitâ enim, quantùm attinet ad præsens institutum, figurâ præcedentis propositionis; data sit quæuis tangens *n b*, occurrens *d a* protractæ in *b*. Ordinetur *n t* ad axem *a d*; atque item *t k* ordinata sit in quadrante circuli *d a c*, cuius centrum *d*. Tum fiat *b t* ad quandam *f x*, vt *t k* ad *d c:* ac rursum, vt *t n* ad *d m*, ita *f x* ad quandam *d a r*. Dico iunctam *m r* fore contingentem. Quoniam enim curua *a m* intelligi potest descripta ex duplici motu, in præcedenti propositione explicato; æquales

inter

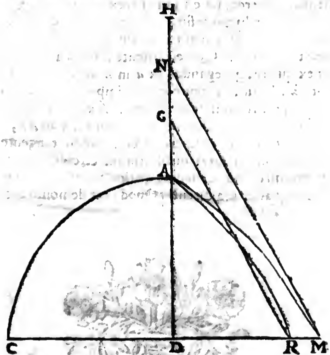
inter se erunt impetus in *n*, & *m*, secundùm ipsas horizontales *t n*, *d m*. Rursum, ita erit in *n* impetus viuus componens secundùm horizontalem *t n*, ad alterum impetum viuum (a) componentem, qui est secundùm parallelam ipsi *a t*, vt *t n* ad *t b*. Ille autem impetus, secundùm parallelam ipsi *a t*, æqualis est illi, qui ex quiete aggregari posse intelligitur ex *a* in *t* iuxta nostram hypothesin. Præterea, ita est impetus ex quiete aggregandus ex *a* in *t* iuxta nostram hypothesin, ad impetum ex quiete aggregandum ex *a* in centrum *d* iuxta nostram (b) hypothesin, vt *t k* ad *d t*, siue, vt *b t* ad *f x*. Quare, existente impetu horizontali, vt *t n*, impetus ex quiete aggregandus ex *a* in *d* iuxta nostram hypothesin erit, vt *f x*. Igitur, existente eodem impetu horizontali, vt *d m*, prædictus impetus ex quiete aggregandus ex *a* in *d* iuxta nostram hypothesin erit, vt *d r*; cum ita posuerimus *f x* ad *d r*, vt *t n* ad *d m*. Itaque *m r* est (c) tangens. Ex hâc autem tangente constat, per præcedentem, haberi quadraturam circuli. Quamobrem, datâ, præterquam ad verticem, qualibet tangente prædictæ curuæ, habetur quadratura circuli. Quod erat demonstrandum.

PRO-

(a) 17.*huius*. (b) 2.*huius*. (c) *cor. post* 17.*huius*.

PROPOSITIO VIGESIMA.

D*Atâ in lineis rectis ratione temporis totalis in descensu ex quiete ex* a *in centrum* d, *iuxta nostram hypothesin, ad tempus totale iuxta hypothesin Galilæanam, habetur qua-*



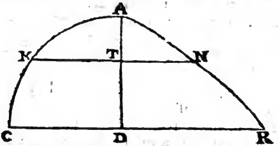
dratura circuli. Hac autem ratio similis est illi, quæ est arcus quadrantis circuli d a c *ad rectam potentem duplum quadratum ipsius radij* a d.

DAta sit ratio prædicta, vt *d m* ad *d r*. Sit etiam *d r m* perpendicularis ipsi *a d*. Constat (*ex* 2. *nostri primi*) impetu quodam semper æquabili percurri posse ipsas *d r*, *d m* in prædi-
ctis

ctis temporibus correſpondentibus. Quare intelligi poterunt deſcriptæ duæ curuæ *a r*, *a m*; quales exhibuimus in propoſitione 16. huius libri. Porrò, exiſtente *d a b* duplâ ipſius *d a*, inter eas media proportionalis ſit *d a g*. Iungatur *r g*, cui parallela ſit *m n* occurrens *d b* in *n*. Iam verò, ex deductis in propoſitione 18. huius libri, ſatis conſtare poteſt, quòd *m n* erit tangens. Igitur (ex eâdem prop.) recta *d n* æqualis erit arcui quadrantis circuli *d a c*: vnde habetur quadratura circuli. Rurſum, ita eſt tempus totale ex *a* in centrum *d* iuxta noſtram hypotheſin, ad tempus totale ex *a* in idem centrum *d* iuxta hypotheſin Galilæanam, vt *d m* ad *d r*, ſiue vt *d n* ad *d g*, hoc eſt, vt arcus prædicti quadrantis circuli ad quandam rectam potentem duplum quadratum ipſius radij *a d*. Quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

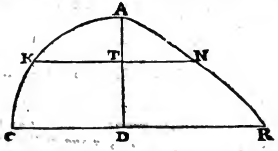
Esto quadrans circuli d a c, *cuius centrum* d: *atque item parabola* d a r, *cuius latus rectum duplum ſit axis* a d. *Deſignetur in* a d *quoduis punctum* t, *à quo ordinentur* t k, t n,



ad arcum a c, *& curuam* a r. *Dico primò ita fore impetum totalem ex quiete aggregatum ex* a *in* t *iuxta noſtram hypotheſin, ad impetum totalem ex quiete aggregatum ex* a *in* t *iuxta hypotheſin Galilaanam, vt ordinata* k t *ad ordinatam* t n. *Dico ſecundò ita fore tempus totale ex* a *in* t *iuxta noſtram hypotheſin, ad tempus totale ex* a *in* t *iuxta hypotheſin Galilaanam, vt arcus*

cus ka *ad eam ordinatam* tn. *Vnde rursum, datâ in lineis rectis ratione prædictorum temporum totalium, habetur quadratura circuli, dum tamen aliàs nota sit longitudo* ad, *existente* d *centro aliquo grauium*.

ET prima quidem pars congruit cum propositione 15. huius libri. Secunda autem ita euincitur. Nam tempora totalia ex quiete ex *a* in *t*, & ex *a* in centrum *d* iuxta nostram hypothesin, proportionalia sunt (a) arcubus *ka*, *ca*. Rursum tempora totalia ex quiete ex *a* in *d* iuxta nostram hypothesin, &



iuxta Galilæanam, proportionalia sunt (b) arcui *ca*, & ordinatæ *dr*. Tandem tempora totalia ex quiete ex *a* in *d*, & ex *a* in *t* iuxta hypothesin Galilæanam, proportionalia sunt (c) ipsis ordinatis *dr*, *tn*. Igitur, ex æquo, tempus totale ex *a* in *t* iuxta nostram hypothesin, ita est ad tempus totale ex *a* in *t* iuxta hypothesin Galilæanam, vt arcus *ka* ad eam ordinatam *tn*. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Porrò, datâ in lineis rectis ratione postremorum horum temporum, habebitur vtique linea recta æqualis arcui *ka*: vnde habetur quadratura circuli. Quamobrem constant omnia proposita.

FINIS.

(a) 6. *huius*. (b) *prop. præc.* (c) 16. *huius*.